TMA4240 Statistikk H2016 [17]

Bolk 2: Statistisk inferens
Egenskaper til en god estimator [9.3]
Sannsynlighetsmaksimering [9.14]

Mette Langaas

Institutt for matematiske fag, NTNU

wiki.math.ntnu.no/emner/tma4240/2016h/start/

Estimering

- Mål: finne "sannheten" om et fenomen i en populasjon.
- "Sannheten" knytter vi til en ukjent parameter, θ, i en valgt fordeling (p, μ, σ^2).
- Vi trekker et tilfeldig utvalg fra populasjonen; $X_1, X_2, ..., X_n$ (u.i.f.).
- En estimator gir et anslag for den ukjente parameteren og er en funksjon av stokastiske variabler, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$.
- Hvilke egenskaper bør en god estimator ha?
  - Estimatoren bør være forventningsrett, dvs. $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$.
  - Estimatoren bør ha minst mulig varians, $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$, og variansen bør avta når antall observasjoner, n, øker.
- Hvordan kan vi finne estimatorer?
  - ved intuisjon,
  - ved matematisk metode.
- Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) finner det anslaget som gjør at de observasjonene vi har gjort (utvalget) har maksimal rimelighet!

MapleTA øving 8, oppgave 5 [9.3]

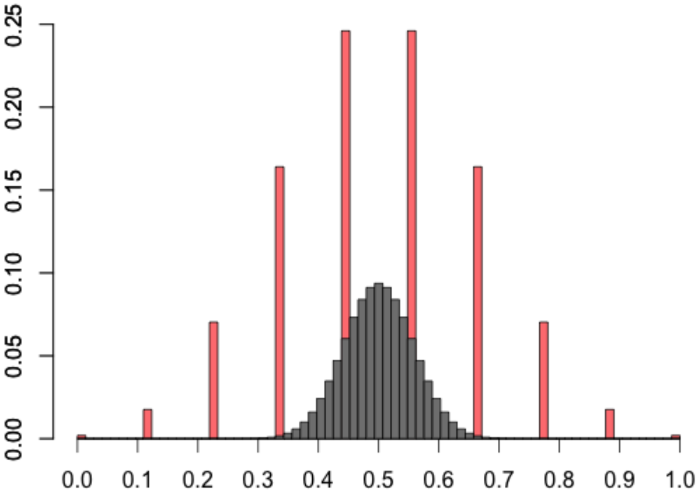
(med tall som Mette fikk - du får noen andre tall).

La $X_1, X_2, \ldots, X_8$ være et tilfeldig utvalg fra en binomisk fordeling med $n = 9$. Det vil si at hver X_i kan ta verdier i $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Vi ønsker å estimere suksess-sannsynligheten p i denne binomiske fordelingen. To estimatorer er blitt foreslått:

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{9} \text{ og } \hat{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i}{9 \cdot 8}$$

Dersom den sanne verdien til p er 0.5, hva er variansen til den estimatoren vi vil foretrekke?

Fordelingen til $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$



SME [9.14]

DEF 9.3: Gitt uavhengige observasjoner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fra en sannsynlighetstetthet (i det kontinuerlige tilfellet) eller en punktsannsynlighet (i det diskrete tilfellet) $f(x;\theta)$. Da er **sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren** (SME) for θ verdien som maksimerer rimelighetsfunksjonen

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1;\theta) \cdot f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta).$$

SME: steg

1. Ønsker estimator for parameter θ, basert på
2. tilfeldig utvalg fra populasjon beskrevet ved kjent parametrisk fordeling $f(x;\theta)$.
3. Rimelighetsfunksjonen;
$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta).$$
4. Skal maksimere rimelighetsfunksjonen, lettere å jobbe med den naturlige logaritmen til rimelighetsfunksjonen
$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$$
5. Deriverer logaritmen til rimelighetsfunksjonen med hensyn på θ.
6. Setter den deriverte lik 0 og løser ut for θ. Dette blir vår sannsynlighetsmaksimeringsestimator for θ.
(Kan også sjekke at dette er maksimum– og ikke minimum– ved å derivere en gang til og se at denne 2.deriverte er negativ.)

SME for μ i normalfordelingen

- Tilfeldig utvalg, $X_1, X_2, ..., X_n$ u.i.f normal $n(x; \mu, \sigma)$.
- Husker mulige estimator for μ er $\bar{X}$. Hva er SME?
- Rimelighetsfunksjonen og logaritmen til rimelighetsfunksjonen::

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, ...x_n, \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \\
\ln L(x_1, x_2, ...x_n, \mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2
\end{aligned}
$$

SME for μ i normalfordelingen

- Derivere mhp μ:
$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ...x_n, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$
- Løser $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$: $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$.
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

SME for σ^2 i normalfordelingen

- Husker mulig estimator for σ^2 er S^2. Hva er SME?
- Har logaritmen til rimelighetsfunksjonen:

$$\ln L(x_1, x_2, ...x_n, \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

- Derivere mhp $\tau = \sigma^2$:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ...x_n, \mu, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{n}{2\tau} + \frac{1}{2(\tau)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

- Finne $\hat{\tau} = \widehat{\sigma^2}$ ved å sette $\frac{\partial \ln L}{\partial(\tau)} = 0$. Setter inn estimatet $\bar{x}$ for μ.

$$-\frac{n}{2\tau} + \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$$

$$-n + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0 \text{ dvs. } \hat{\tau} = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$