Bernoulli forsøksrekke og binomisk fordeling

- Bernoulli forsøksrekke

  i) gjentar et forsøk n ganger
  ii) hvert forsøk gir enten suksess eller fiasko
  iii) sannsynligheten for suksess er p i alle forsøkene
  iv) de n forsøkene er uavhengige

- X: antall suksesser i de n forsøkene
- Tenker på: Trekning av kuler fra urne med tilbakelegging
- Vi utledet

$$b(x; n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{for } x = 0, 1, \ldots, n$$

$$\mathrm{E}[X] = np \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$$

- Multinomisk fordeling:
  - generalisering til k mulige resultat i hvert forsøk

Geometrisk og negativ binomisk fordeling

- Stokastisk forsøk:
  - *i*) gjentar et forsøk gjentatte ganger
  - *ii*) hvert forsøk gir enten suksess eller fiasko
  - *iii*) sannsynligheten for suksess er p i alle forsøkene
  - *iv*) forsøkene er uavhengige
- X: antall forsøk til suksess nummer k
- For $k = 1$ utledet vi

$$g(x; p) = P(X = x) = p(1-p)^{k-1}, x = 1, 2, \dots$$

- Forventingsverdi og varians for $k = 1$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

- Merk: ikke tabell over $F(x) = P(X \leq x)$ for geometrisk fordeling!
  - vi trenger det ikke, kan regne ut formel for $F(x)$

Geometrisk og negativ binomisk fordeling

- Stokastisk forsøk:

  i) gjentar et forsøk gjentatte ganger
  ii) hvert forsøk gir enten suksess eller fiasko
  iii) sannsynligheten for suksess er p i alle forsøkene
  iv) forsøkene er uavhengige

- X: antall forsøk til suksess nummer k
- For $k = 1$ utledet vi

$$g(x; p) = P(X = x) = p(1-p)^{k-1}, x = 1, 2, \ldots$$

- Forventingsverdi og varians for $k = 1$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

- Merk: ikke tabell over $F(x) = P(X \leq x)$ for geometrisk fordeling!
  - vi trenger det ikke, kan regne ut formel for $F(x)$
- Hva når $k > 1$?

Poissonprosess og poissonfordeling

- Poissonprosess: hendelser langs en tidsakse
    1) antall hendelser i disjunkte intervall er uavhengige

Poissonprosess og poissonfordeling

- Poissonprosess: hendelser langs en tidsakse
  1) antall hendelser i disjunkte intervall er uavhengige
  2) sanns. for en hendelse i et kort intervall er proposjonal med lengden av intervallet,

$$P(\text{"}X = 1\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Poissonprosess og poissonfordeling

- Poissonprosess: hendelser langs en tidsakse
  1) antall hendelser i disjunkte intervall er uavhengige
  2) sanns. for en hendelse i et kort intervall er proposjonal med lengden av intervallet,

  $$P(\text{"}X = 1\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

  3) sanns. for minst to hendelser i et kort intervall er neglisjerbart,

  $$P(\text{"}X \geq 2\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = o(\Delta t)$$

Poissonprosess og poissonfordeling

- Poissonprosess: hendelser langs en tidsakse
  1) antall hendelser i disjunkte intervall er uavhengige
  2) sanns. for en hendelse i et kort intervall er proposjonal med lengden av intervallet,

$$P(\text{"}X = 1\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

  3) sanns. for minst to hendelser i et kort intervall er neglisjerbart,

$$P(\text{"}X \geq 2\text{" i intervallet } [t, t + \Delta t)) = o(\Delta t)$$

- X: antall hendelser i intervallet $[0, t)$.

Hva har vi gjort for de diskrete fordelingene?

- Beskrevet stokastisk forsøk
  - utledet formel for punktsannsynlighet, $f(x) = P(X = x)$
- Utledet formel for $E[X]$
- Utledet formel for $\text{Var}[X]$
- Sett på tabeller over $F(x) = P(X \leq x)$
- Regnet på eksempler

- Sett på sammenhenger mellom fordelinger:
  - hypergeometrisk $\approx$ binomisk når N er stor i forhold til n
  - binomisk $\approx$ poisson når n er stor og p er liten

Kontinuerlig stokastisk variabel

- Denne uka skal vi se på de viktigste kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

- X: det er ikke-tellbart uendelig mange mulige verdier
- Sannsynlighetsfordeling (sannsynlighetstetthet)

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Kumulativ fordeling

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

- Forventningsverdi

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$

- Varians

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$$