Funksjoner av stokastiske variabler (Kap 7)

Situasjon:

- Vi har $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavhengige og identisk fordelt (u.i.f) SV
- Fordeling til X_i'ene er kjent ($f(x)$ og $F(x)$)
- Vi definerer en ny SV : $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Hvordan finner vi fordeling til Y??

Løsning er avhengig av egenskapene til $u(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$.
Vi ser på tre klasser av funksjoner $u(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$:

1. $u(\cdot)$ er en funksjon av kun en SV og er én-entydig
2. $u(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ gir den k-te minste verdien
3. $u(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ er en lineær funksjon av $X_1, X_2, \ldots, X_n$

1. $u(\cdot)$ er en funksjon av kun en SV og er én-entydig

La X være en SV med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$. Anta at $u(\cdot)$ er en én-entydig funksjon slik at der er mulig å finne $X = w(Y)$. Da vi kan finne fordeling til Y, $g(y)$ ved å:

- Starte fra kumulativ fordeling $G(y) = P(Y \leq y)$ og relatere det til $F(x) = P(X \leq x)$
- Bruke teorem 7.1 (diskre SV) eller 7.3 (kontinuerlig SV)

2. $u(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ gir den k-te minste verdien

- $Y = max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ da

$$G(y) = [F(y)]^n$$

- $Y = min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ da

$$G(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$$

- $Y = k^{\text{th}}$ ordningsvariabel $X_{(k)}$ da

$$G(y) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F(y)]^j [1 - F(y)]^{n-j}$$

3. $u(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ er en lineær funksjon av $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

Før vi lærer å finne fordeling til Y må vi introduserer nye begreper

- Momenter
- Momentgenererende funksjon

Momentgenerererende funksjon for noen fordelinger

Fordeling	$f(x)$	$M_X(t)$
Standard normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	$e^{t^2/2}$
Normal(μ, σ)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	
Eksponensial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{1-t/\lambda}$ for $t < \lambda$
Chi-kvadrat(ν)	$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}$	$(\frac{1}{1-2t})^{\nu/2}$ for $t < 1/2$
Binomisk(n, p)	$\binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}$	$(pe^t + 1 - p)^3$
Poisson(μ)	$\frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$	$e^{\mu(e^r - 1)}$
Geometrisk(p)	$p(1-p)^{(x-1)}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ for $t < \ln(1-p)$