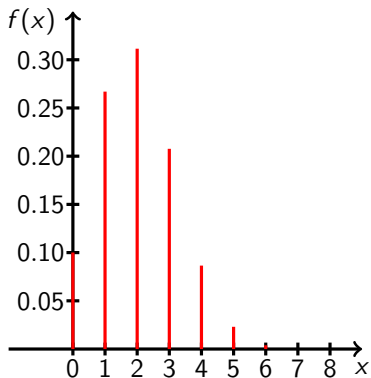


Stokastiske variabler og sannsynlighetsfordelinger

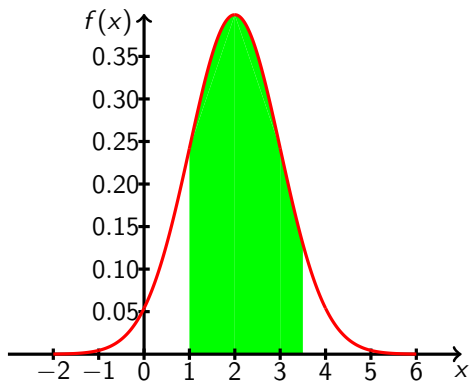
Diskret stokastisk variabel

$$f(x) = P(X = x)$$



Kontinuerlig stokastisk fordeling

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Forventningsverdi og varians

- ▶ For en stokastisk variabel X med fordeling $f(x)$ har vi
 - ▶ forventningsverdi

$$\mu = \mu_X = E[X] = \begin{cases} \sum_x xf(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

- ▶ varians

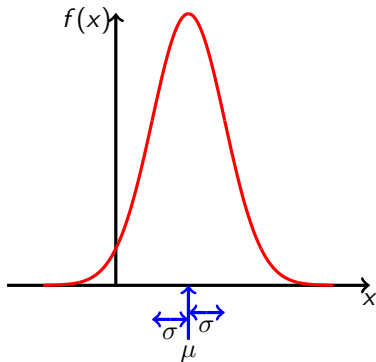
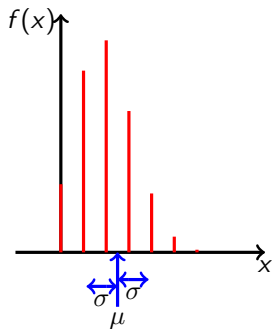
$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ▶ standardavvik

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

Intuisjon om forventningsverdi og standardavvik

- ▶ Forventningsverdi, μ :
 - ▶ tolkning: “gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner av X ”
 - ▶ er definert på samme måte som tyngdepunktet til et legeme
- ▶ Standardavvik, $SD[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$:
 - ▶ “typisk” avvik mellom X og μ



Regneregler for $E[\cdot]$ og $\text{Var}[\cdot]$

- ▶ $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- ▶ $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$
- ▶ Lineære funksjoner:

$$\begin{array}{l|l} E[aX] = aE[X] & \text{Var}[aX] = a^2\text{Var}[X] \\ E[X + Y] = E[X] + E[Y] & \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y] \\ E[a] = a & \text{Var}[a] = 0 \end{array}$$

- ▶ Hvis X og Y er uavhengige:
 - ▶ $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$
 - ▶ $\text{Cov}[X, Y] = 0$
 - ▶ $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

Multinomisk fordeling

- ▶ Generalisering av binomisk fordeling
 - ▶ k mulige utfall i hvert enkeltforsøk
 - ▶ $k = 2$ gir binomisk fordeling

Multinomisk fordeling

- ▶ Generalisering av binomisk fordeling
 - ▶ k mulige utfall i hvert enkeltforsøk
 - ▶ $k = 2$ gir binomisk fordeling
- ▶ Situasjon:
 - i) gjentar et forsøk n ganger
 - ii) hvert forsøk gir ett av k mulige resultater, E_1, E_2, \dots, E_k
 - iii) sannsynligheten for E_1 er p_1 , sannsynligheten for E_2 er p_2, \dots , sannsynligheten for E_k er p_k i alle forsøk (må ha $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$)
 - iv) de n forsøkene er uavhengige

Multinomisk fordeling

- ▶ Generalisering av binomisk fordeling
 - ▶ k mulige utfall i hvert enkeltforsøk
 - ▶ $k = 2$ gir binomisk fordeling
- ▶ Situasjon:
 - i) gjentar et forsøk n ganger
 - ii) hvert forsøk gir ett av k mulige resultater, E_1, E_2, \dots, E_k
 - iii) sannsynligheten for E_1 er p_1 , sannsynligheten for E_2 er p_2, \dots , sannsynligheten for E_k er p_k i alle forsøk (må ha $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$)
 - iv) de n forsøkene er uavhengige
- ▶ La X_1 være antall forsøk som gav E_1 , la X_2 være antall forsøk som gav E_2, \dots , la X_k være antall forsøk som gav E_k

Multinomisk fordeling

- ▶ Generalisering av binomisk fordeling
 - ▶ k mulige utfall i hvert enkeltforsøk
 - ▶ $k = 2$ gir binomisk fordeling
- ▶ Situasjon:
 - i) gjentar et forsøk n ganger
 - ii) hvert forsøk gir ett av k mulige resultater, E_1, E_2, \dots, E_k
 - iii) sannsynligheten for E_1 er p_1 , sannsynligheten for E_2 er p_2, \dots , sannsynligheten for E_k er p_k i alle forsøk (må ha $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$)
 - iv) de n forsøkene er uavhengige
- ▶ La X_1 være antall forsøk som gav E_1 , la X_2 være antall forsøk som gav E_2, \dots , la X_k være antall forsøk som gav E_k
- ▶ Hva blir simultan punktsannsynlighet for X_1, X_2, \dots, X_k ?