NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Hypotesetesting

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
02.11.2018

I dag

- Introduksjon til hypotesetesting
- Teststyrke/styrkefunksjon
- Generell framgangsmåte

Introduksjon til hypotesetesting

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

- Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane
- Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

- Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane
- Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Korleis kan me konkludere om B er betre enn A?

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

- Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane
- Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Korleis kan me konkludere om B er betre enn A?

Tester medisin B på $n = 25$ pasientar. Observerer betring for $x = 20$.

Hypotesetesting

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H_0	Ok	Type II-feil

Hypotesetesting

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H_0	Ok	Type II-feil

Ide: vi må vere "sikre" før me påstår at H_1 er rett. Me velg signinifikansnivået α liten og krev

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

$$\beta = P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ er riktig})$$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

— $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$

— $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$

— $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$

— $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$

— $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

- $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$
- $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$
- $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$
- $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$
- $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

- $P(X \geq 25) = 0.0001$
- $P(X \geq 24) = 0.0015$
- $P(X \geq 23) = 0.0089$
- $P(X \geq 22) = 0.0332$
- $P(X \geq 21) = 0.0904$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

- $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$
- $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$
- $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$
- $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$
- $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

- $P(X \geq 25) = 0.0001$
- $P(X \geq 24) = 0.0015$
- $P(X \geq 23) = 0.0089$
- $P(X \geq 22) = 0.0332$
- $P(X \geq 21) = 0.0904$

Må velge $k = 22$

Sannsyn type-II feil

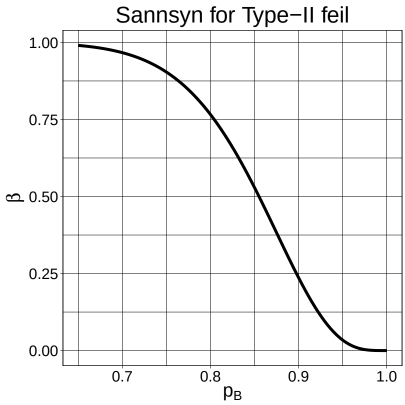

Figure: $\beta = P(X < 22 \text{ når } p_B > 0.7) = \sum_{x=0}^{21} \binom{25}{x} p_B^x (1 - p_B)^{25-x}$

Styrkefunksjon

Teststyrke/styrkefunksjon

Definisjon

Styrken til ein test er sannsynet for å forkaste H_0 gitt at ein spesifikk alternativ hypotese θ_1 er sann

- teststyrken er $1 - \beta(\theta_1)$
- teststyrken er ein funksjon av θ_1
- desto høgare styrke, desto høgare sannsyn for at me klarer å konkludere med at den alternative påstanden er sann når den spesifikke alternative hypotesen er sann.

Styrkefunksjon

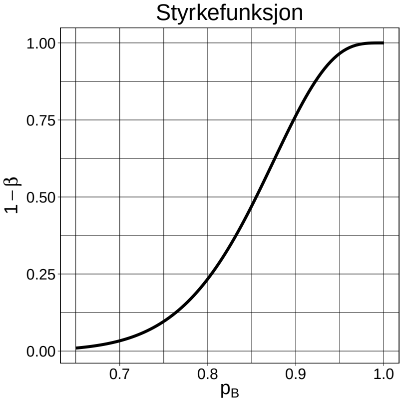

Figure: $1 - \beta = 1 - P(X < 22 \text{ når } p_B > 0.7) = 1 - \sum_{x=0}^{21} \binom{25}{x} p_B^x (1 - p_B)^{25-x}$

Generell framgangsmåte

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \le h(\hat{\theta}, \theta) \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. Finn ein estimator for θ; $\widehat{\theta}$
3. La $Z = h(\widehat{\theta}, \theta_0)$, der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling
4. Bestem eit forkastningskriterium (antar Z stor når $\widehat{\theta}$ stor)
   a) Forkast H_0 dersom $Z > k$
   b) Forkast H_0 dersom $Z < k$
   c) Forkast H_0 dersom $Z < k_l$ eller $Z > k_u$

   der k bestemmes frå kravet

$$P(\text{Forkast H}_0 \text{ når H}_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

5. Sett inn tal og konkluder

Neste veke

— p-verdi
— Fleire eksempel hypotesetesting
— Lineær regresjon