NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Lineær regresjon

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
13.11.2018

I dag

— Repetisjon
— Motiverande eksempel
— Eigenskapar til estimatorane (lineær regresjon)

Repetisjon

Enkel lineær regresjon

Situasjon: har observert par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er kjende tal
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er realisasjonar frå uavhengige stokastiske variablar $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ med

$$Y_i | x_i \sim n(y_i; \alpha + \beta x_i, \sigma)$$

Enkel lineær regresjon

Situasjon: har observert par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er kjende tal
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er realisasjonar frå uavhengige stokastiske variablar $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ med

$$Y_i | x_i \sim n(y_i; \alpha + \beta x_i, \sigma)$$

Merk:

$$E(Y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i = \mu_i$$

$$Var(Y_i|x_i) = \sigma^2$$

Enkel lineær regresjon

Situasjon: har observert par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er kjende tal
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er realisasjonar frå uavhengige stokastiske variablar $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ med

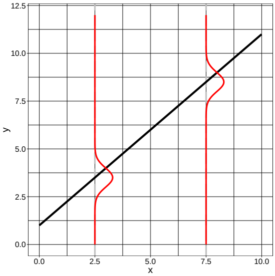
$$Y_i|x_i \sim n(y_i; \alpha + \beta x_i, \sigma)$$

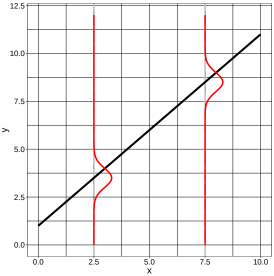
Merk:

$$E(Y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i = \mu_i$$

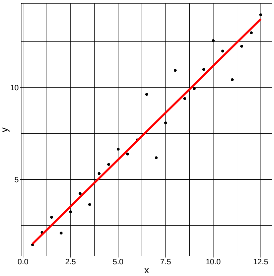
$$Var(Y_i|x_i) = \sigma^2$$

Mål: estimere α, β og σ^2

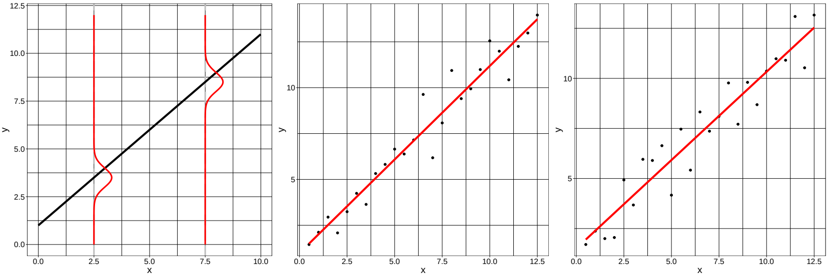

12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x



12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x



10
5
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
x



12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
x
10
5
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
x
10
5
y
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
x

SME enkel lineær regresjon I

Maksimer log-rimelighetsfunksjon

$$l(\alpha, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

SME enkel lineær regresjon II

Definer:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

SME

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \qquad \widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{x} \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i)^2$$

Eksempel
(eksamen desember 2012)

Eksempel

Vinnertid på 800 m løping for menn i OL (siden 1912).

- Y_i er vinnertid i OL nummer i
- x_i er årstal for OL nummer i

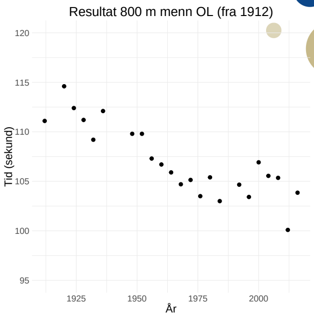
for $i = 1, 2, \ldots, 23$

Eksempel

Vinnertid på 800 m løping for menn i OL (siden 1912).

- Y_i er vinnertid i OL nummer i
- x_i er årstal for OL nummer i

for $i = 1, 2, \ldots, 23$

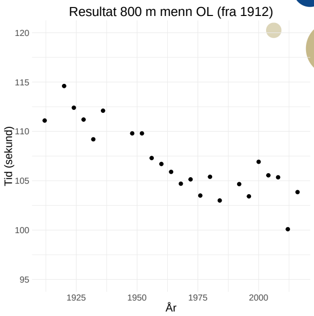


Eksempel

Vinnertid på 800 m løping for menn i OL (siden 1912).

- Y_i er vinnertid i OL nummer i
- x_i er årstal for OL nummer i

for $i = 1, 2, \ldots, 23$



Anta følgjande lineære samanheng

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

der $\varepsilon_i \sim n(\epsilon; 0, \sigma)$ og uavhengige.

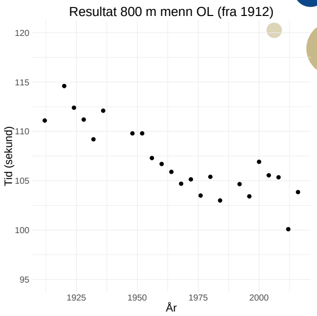
Eksempel

Vinnertid på 800 m løping for menn i OL (siden 1912).

— Y_i er vinnertid i OL nummer i

— x_i er årstal for OL nummer i

for $i = 1, 2, \ldots, 23$



Anta følgjande lineære samanheng

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

der $\varepsilon_i \sim n(\epsilon; 0, \sigma)$ og uavhengige.

Utlei eit $(1 - \alpha) \cdot 100$ % konfidensintervall for β

Kva er fordelinga til $\widehat{\beta}$?

Eigenskapar til estimatorane

$$\widehat{\beta} \sim n\left(z; \beta, \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

Eigenskapar til estimatorane

$$\widehat{\beta} \sim n\left(z; \beta, \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\widehat{\alpha} \sim n\left(z; \alpha, \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

Eigenskapar til estimatorane

$$\widehat{\beta} \sim n\left(z; \beta, \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\widehat{\alpha} \sim n\left(z; \alpha, \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

Merk

$$E(\widehat{\sigma}^2) = \frac{n-2}{n}\sigma^2,$$

me nyttar derfor

$$S^2 = \frac{n}{n-2}\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_i)^2$$

Eigenskapar til estimatorane

$$\widehat{\beta} \sim n\left(z; \beta, \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

$$\widehat{\alpha} \sim n\left(z; \alpha, \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$$

Merk

$$E(\widehat{\sigma}^2) = \frac{n-2}{n}\sigma^2,$$

me nyttar derfor

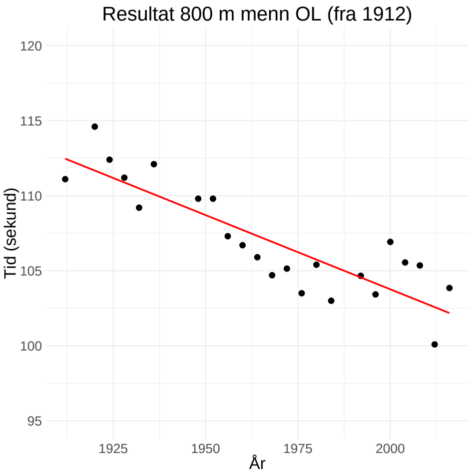
$$S^2 = \frac{n}{n-2}\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_i)^2$$

$$\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

Konfidensintervall β

$$\left[\widehat{\beta} - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{S^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, \widehat{\beta} + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{S^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}\right]$$

Resultat eksempel



Torsdag

- Prediksjonsintervall
- Diskusjon av modellantakingar