



Student t-fordelinga og konfidensintervall

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

25.10.2018

I dag



- Informasjon
- Repetisjon
- Student t-fordelinga
- Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ ukjend)
- Konfidensintervall for p i binomisk fordeling

Informasjon



- Eksamen onsdag 28.11 kl. 09:00
- Kræsjkurs før eksamen: onsdag 21.11 frå kl. 16:15 (meir informasjon seinare)
- Maple TA øving 10 får frist onsdag 07.11 kl. 16:00
- Maple TA øving 11 får frist onsdag 14.11 kl. 16:00
- Maple TA øving 12 får frist onsdag 21.11 kl. 16:00



Kji-kvadratfordeling (χ^2 -fordeling)

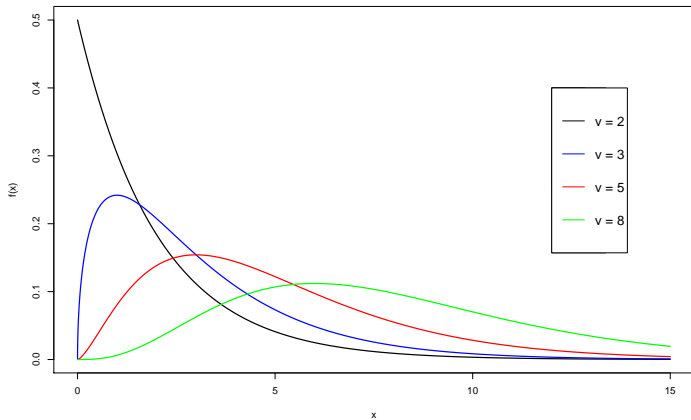
Sannsynstettleiken til ein χ^2 -fordelt variabel X er:

$$f(x; \nu) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Det kan visast at

$$E(X) = \nu \quad \text{og} \quad \text{Var}(X) = 2\nu.$$

Repetisjon II



Repetisjon III



Utvalgsfordelinga til S^2

Dersom X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige og $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ er

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

og $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ og \bar{X} er uavhengige.

Repetisjon IV

Student t-fordelinga

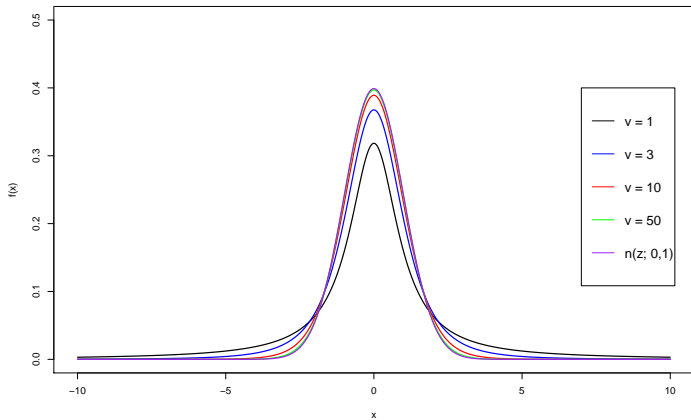
La $Z \sim n(z; 0, 1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ der Z og V er uavhengige. Då vil fordelinga

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$$

ha sannsynstettleik

$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad -\infty < t < \infty.$$

Repetisjon V



Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval frå $f(x; \theta)$ -populasjonen.
Ynskjer eit $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ .

1. Finn ein estimator for θ , $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n) \right]$$

Kva situasjonar har me sett så langt?

1. X_1, X_2, \dots, X_n uif $n(x; \mu, \sigma)$ (σ kjend)

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \right]$$

2. X_1, X_2, \dots, X_n uif $n(x; \mu, \sigma)$ (σ ukjend)

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right]$$

3. X_1, X_2, \dots, X_n uif $n(x; \mu, \sigma)$ (μ ukjend)

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right]$$

4. X_1, X_2, \dots, X_n uif $b(x; n, p)$ (**approversimativt**)

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Neste veke



- To-utval
- Prediksjonsintervall
- Hypotesetesting