NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Student t-fordelinga og konfidensintervall

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
26.10.2018

Korreksjon frå måndag

Sannsynstettleiken til student t-fordelinga er:

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty.$$

I dag

- Informasjon
- Repetisjon
- Student t-fordelinga
- Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ ukjend)
- Konfidensintervall for p i binomisk fordeling

Informasjon

- Eksamen onsdag 28.11 kl. 09:00
- Kræsjkurs før eksamen: onsdag 21.11 frå kl. 16:15 (meir informasjon seinare)
- Maple TA øving 10 får frist onsdag 07.11 kl. 16:00
- Maple TA øving 11 får frist onsdag 14.11 kl. 16:00
- Maple TA øving 12 får frist onsdag 21.11 kl. 16:00

Repetisjon I

Kji-kvadratfordeling (χ^2-fordeling)

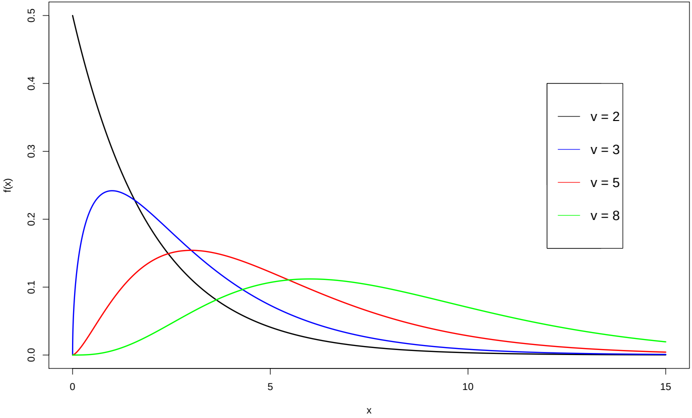
Sannsynstettleiken til ein χ^2-fordelt variabel X er:

$$f(x;\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Det kan visast at

$$E(X) = \nu \qquad \text{og} \qquad Var(X) = 2\nu.$$

Repetisjon II



Repetisjon III

Utvalsfordelinga til S^2

Dersom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ er

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

og $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ og $\bar{X}$ er uavhengige.

Repetisjon IV

Student t-fordelinga

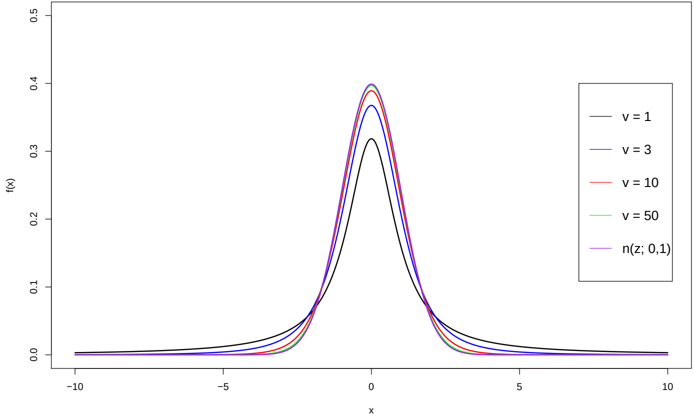
La $Z \sim n(z; 0, 1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ der Z og V er uavhengige. Då vil fordelinga

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$$

ha sannsynstettleik

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Repetisjon V



Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at
$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$
4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten
$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1-\alpha$$
5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er
$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$

Kva situasjonar har me sett så langt?

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu, \sigma)$ (σ kjend)
$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$
2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu, \sigma)$ (σ ukjend)
$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$
3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu, \sigma)$ (μ ukjend)
$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right]$$
4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $b(x; n, p)$ (approksimativt)
$$\left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

Neste veke

- To-utval
- Prediksjonsintervall
- Hypotesetesting