Sannsynlighetsfordelinger vi har sett på

- Binomisk fordeling
  - Bernoulli forsøksrekke
  - antall suksesser i n forsøk
  - generalisering: multinomisk fordeling
- Hypergeometrisk fordeling
  - trekker uten tilbakelegging
- Negativ binomisk fordeling
  - Bernoulli forsøksrekke
  - antall forsøk til suksess nummer k
  - spesialtilfelle: geometrisk fordeling ($k = 1$)
- Poissonfordeling
  - antall hendelser i en poissonprosess
- Uniform
- Normal

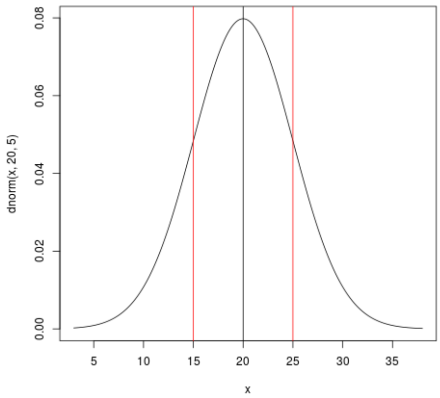
Sammenhenger mellom fordelinger

- hypergeometrisk $\approx$ binomisk når N er stor i forhold til n
- binomisk $\approx$ Poisson når n er stor og p liten

I dag

- Mer om Normal fordeling
- Flere sammenhenger
- Flere kontinuerlig fordeling:
    - Uniform
    - Eksponensiell
    - Gamma

Normal fordeling



$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- Forventningsverdi: μ. Lokasjon parameter
- Varians: σ^2. Skalering parameter.

Standard Normal Probabilities

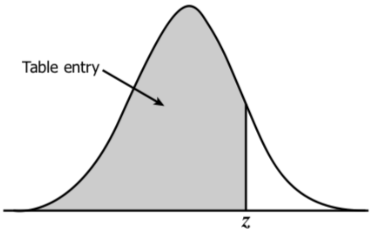


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

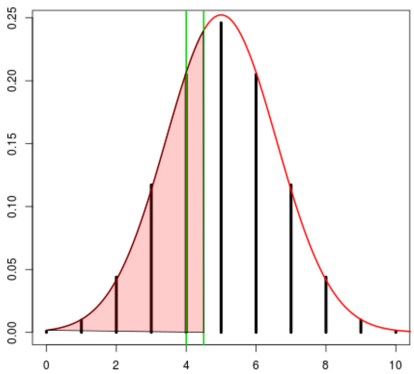
z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936

Kritiske verdier i standard normalfordelingen

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

α	z_α
.2	0.842
.15	1.036
.1	1.282
.075	1.440
.05	1.645
.04	1.751
.03	1.881
.025	1.960
.02	2.054
.01	2.326
.005	2.576
.001	3.090
.0005	3.291
.0001	3.719
.00005	3.891
.00001	4.265
.000005	4.417
.000001	4.753

Binomisk og Normal fordeling



- $X \sim \text{Bin}(10, 0.5)$
- $P(X \leq 4) = 0.376$
- Normal tilnærming

$$Z = \frac{X - 5}{\sqrt{2.5}} \sim N(0, 1)$$

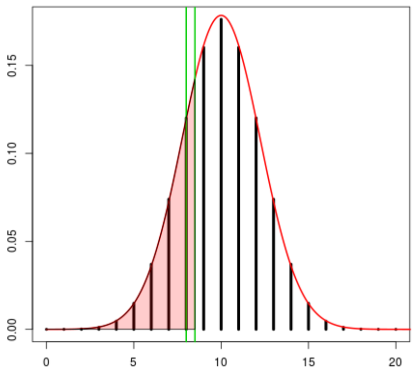
- Uten korreksjon

$$P(X \leq 4) \approx 0.26$$

- Med korreksjon

$$P(X \leq 4) \approx 0.375$$

Binomisk og Normal fordeling



- $X \sim \text{Bin}(20, 0.5)$
- $P(X \leq 8) = 0.2517$
- Normal tilnærming

$$Z = \frac{X - 10}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$$

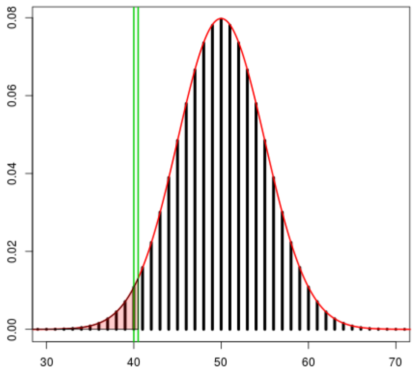
- Uten Korreksjon

$$P(X \leq 8) \approx 0.1855$$

- Med Korreksjon

$$P(X \leq 8) \approx 0.2511$$

Binomisk og Normal fordeling



- $X \sim \text{Bin}(100, 0.5)$
- $P(X \leq 40) = 0.0284$
- Normal tilnærming

$$Z = \frac{X - 50}{\sqrt{25}} \sim N(0, 1)$$

- Uten korreksjon

$$P(X \leq 40) \approx 0.0227$$

- Med korreksjon

$$P(X \leq 40) \approx 0.0287$$

Poisson prosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengige
2. Sannsynlighet for en hendelse i en lite interval er proportional med lengde av interval

$$P(''X = 1'' \text{i intervallet}(t, t + \Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

3. Sannsynlighet for at det er mer enn er hendelse i en lite interval er neglisjerbart

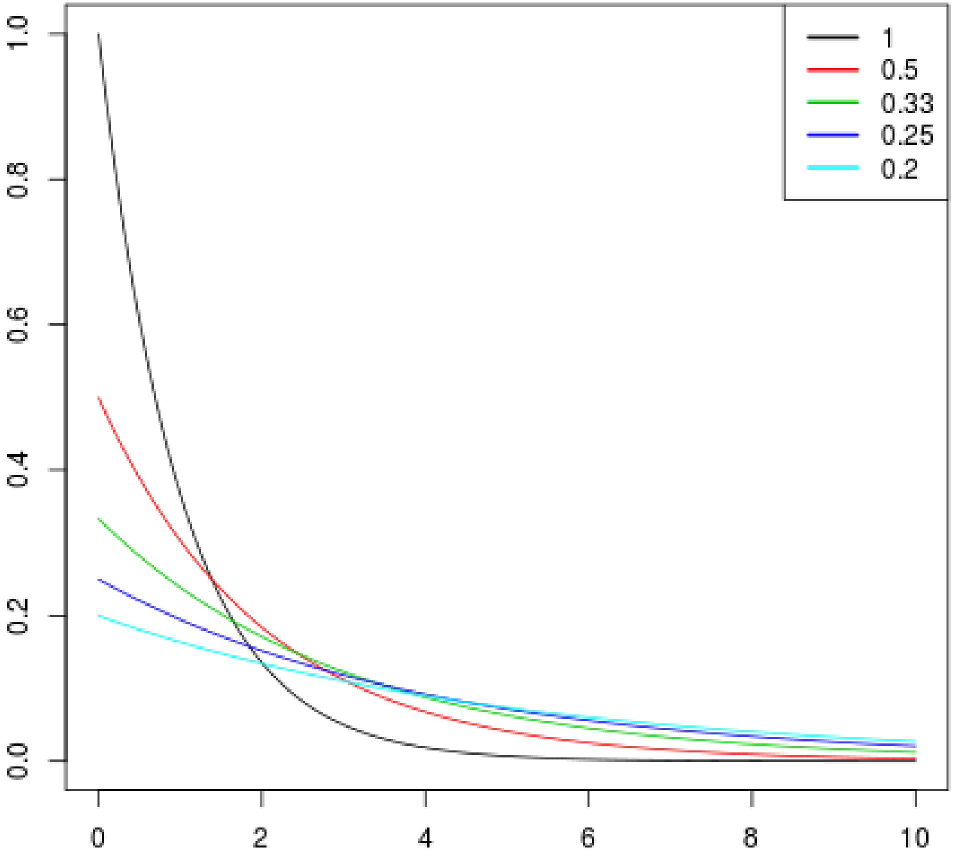
$$P(''X \geq 2'' \text{i intervallet}(t, t + \Delta t)) = o(\Delta t)$$

Den SV $X =$"antall hendelser i $(0, t)$" har en Poisson fordeling med parameter λ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

Der $\lambda =$"Forventet antall hendelser per tids enhet"

Eksponensiell fordeling



Eksempel: Trafikk-kontroll, mobilbruk

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- Antar at antall bilførere som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$, dvs. med forventning $\lambda t = 5t$.
- $Y =$"antall hendelser i intervallet $[0; t]$", er Poisson-fordelt

$$p(y; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!} \text{ for } y = 0, 1, 2, \ldots$$

hvor λ er gjennomsnittlig antall hendelser per enhet (intervall eller region).

Eksempel: Trafikk-kontroll, mobilbruk

Politiet vil aksjonere mot ulovlig mobilbruk i bil, og gjennomfører kontroll ved Lerkendal-rundkjøringen.

- Antar at antall bilførere som blir bøtelagt i løpet av t timer er Poisson-fordelt med intensitet $\lambda = 5$, dvs. med forventning $\lambda t = 5t$.
- $Y =$"antall hendelser i intervallet $[0; t]$", er Poisson-fordelt

$$p(y; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!} \text{ for } y = 0, 1, 2, \ldots$$

  hvor λ er gjennomsnittlig antall hendelser per enhet (intervall eller region).
- La X være tid fra kontrollen starter til første bilfører blir bøtelagt.
- $X =$"tid til første hendelse", er eksponensialfordelt med forventning $\mathrm{E(X)} = 1/\lambda$.

Eksempel: Trafikk-kontroll (forts.)

1. Hva er forventet tid til første bøtelegging?
2. Hvor sannsynlig er det at første bot blir skrevet ut før det er gått 20 min?
3. Dersom ingen er bøtelagt etter 20 min., hva er sannsynligheten for at den første bot ikke blir skrevet ut i løpet av de neste 20 min.?