Val av tal på observasjonar n (kap. 10.6)

Me vil fortsetje eksempelet frå forelesinga der me ynskjer å sjå på verkegraden til ein ny medisin i eit tilfeldig utval. Eksisterane medisin veit ein at verkar i 70% av høva, medan produsenten av den nye medisinen hevdar at den nye medisinen verkar i meir enn 70% av høva. Me ynskjer altså å utføre hypotesetesten

$$H_0 : p = p_0 = 0.7 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : p > 0.7.$$

La X vere talet på pasientar der den nye medisinen har ein positivt effekt, X er altså binomisk fordelt med parametre n og p. Anta no at me tar del i planleggjinga av forsøket og kan bestemme talet på målingar me skal gjere, det vil seie at me kan bestemme n. Merk at p er eit ukjend tal som me er interessert i å anslå.

Ein rimeleg estimator for p er $\hat{p} = X/n$. Frå tidlegare (teorem 6.3 i læreboka) er det kjend at

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx n(z; 0, 1) \quad \text{alltid.} \tag{1}$$

Merk: denne standardiseringa er gjort med hensyn på den sanne verdien til p (som er ukjend).

Testobservatoren me har nytta tidlegare i forelesinga (når n er kjend) er:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \approx n(z; 0, 1) \quad \text{når } H_0 \text{ er riktig.} \tag{2}$$

Merk: Z er kun approksimativt standard normalfordelt dersom $p = p_0$ er korrekt (altså når H_0 er riktig).

Me forkastar H_0 dersom

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > z_\alpha$$

Me må fiksere/velje α slik at

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ riktig}) \leq \alpha$$

er liten. Itillegg ynskjer me å velge n slik at me kontrollerer

$$P(\text{Type II-feil}) = P(\text{ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ riktig}) \leq \beta.$$

Det er ikkje særskild avlvorleg å gjere ein type II-feil dersom den sanne verdien til p er 0.701, men dersom den sanne verdien er $p = 0.85$ er det meir alvorleg å gjere ein type II-feil.

Me vel derfor $\delta > 0$ og ser på $p = p_0 + \delta$. Me vil kontrollere sannsynet for type II-feil, ynskjer altså å krevje n utifrå:

$$P(\text{ikkje forkast } H_0 \text{ når } p = p_0 + \delta) \leq \beta$$

$$P\left(\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq z_\alpha \text{ når } p = p_0 + \delta\right) \leq \beta$$

Merk: her er **IKKJE** H_0 riktig og derfor er **IKKJE** uttrykket standard normalfordelt. Dette sidan (2) berre gjeld for $p = p_0$. Me isolerer no X for seg sjølve og får

$$P\left(X \leq np_0 + z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} \text{ når } p = p_0 + \delta\right) \leq \beta.$$

Me kan no nytte (1) til å få eit uttrykk som er standard normalfordelt:

$$P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{np_0 + z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ når } p = p_0 + \delta\right) \leq \beta$$

Dersom me sett inn $p = p_0 + \delta$ får me

$$\begin{aligned}
P\left(Z \le \frac{np_0 + z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} - n(p_0+\delta)}{\sqrt{n(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))}} \text{ når } p = p_0+\delta\right) &\le \beta \\
P\left(Z \le \frac{z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} - n\delta}{\sqrt{n(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))}} \text{ når } p = p_0+\delta\right) &\le \beta
\end{aligned}$$

der Z er standard normalfordelt. Me får altså følgande krav

$$\frac{z_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)} - n\delta}{\sqrt{n(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))}} \le -z_\beta$$

og løyser ulikskapen med hensyn på n:

$$\begin{aligned}
\frac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} - \sqrt{n}\delta}{\sqrt{(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))}} &\le -z_\beta \\
-\sqrt{n}\delta &\le -z_\beta\sqrt{(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))} - z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} \\
n &\ge \left(\frac{z_\beta\sqrt{(p_0+\delta)(1-(p_0+\delta))} + z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\delta}\right)^2
\end{aligned} \quad . \tag{3}$$

Merk at n må vere eit heiltal, så me runder alltid opp til næraste heiltal.

La oss no anta at me vel å utføre testen med $\alpha = 0.05$ som signifikansnivå, då er $z_\alpha = 1.645$. Tilsvarande krev me at dersom $\delta = 0.15$ vil me at sannsynet for å gjere ein type II-feil skal vere høgst 5%, det vil seie at $\beta = 0.05$ og $z_\beta = 1.645$. Ved å setje inn tala i (3) får me at $n \ge 55$, det vil seie at me må gjere minst $n = 55$ observasjonar.