Forventningsverdi og varians

- For en stokastisk variabel X med fordeling $f(x)$ har vi
  - forventningsverdi

$$\mu = \mu_X = \mathrm{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x f(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

  - varians

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

  - standardavvik

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \sqrt{\mathrm{E}\left[(X - \mu)^2\right]}$$

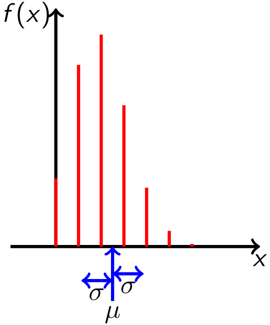
Intuisjon om forventningsverdi og standardavvik

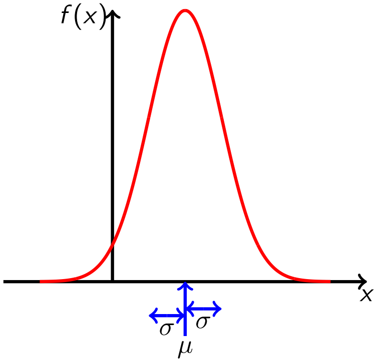
⋆ Forventningsverdi, μ:

- tolkning: "gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner av X"
- definert på samme måte som tyngdepunktet til et legeme

⋆ Standardavvik, $\mathrm{SD}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$:

- tolkning: "typisk" avvik mellom X og μ





Funksjoner av stokastiske variabler

- Forventningsverdi til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{E}[r(X)] = \begin{cases} \sum_x r(x)f(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x)f(x)\mathrm{d}x & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[r(X,Y)] = \begin{cases} \sum_y \sum_x r(x,y)f(x,y) & \text{hvis diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{hvis kont. SV} \end{cases}$$

Funksjoner av stokastiske variabler

- ⋆ Forventningsverdi til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{E}[r(X)] = \begin{cases} \sum_x r(x)f(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x)f(x)\mathrm{d}x & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[r(X,Y)] = \begin{cases} \sum_y \sum_x r(x,y)f(x,y) & \text{hvis diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{hvis kont. SV} \end{cases}$$

- ⋆ NYTT: Varians til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{Var}[r(X)] = \mathrm{E}\left[(r(X) - \mu_{r(X)})^2\right]$$

Funksjoner av stokastiske variabler

- ⋆ Forventningsverdi til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{E}[r(X)] = \begin{cases} \sum_x r(x)f(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x)f(x)\mathrm{d}x & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[r(X,Y)] = \begin{cases} \sum_y \sum_x r(x,y)f(x,y) & \text{hvis diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{hvis kont. SV} \end{cases}$$

- ⋆ NYTT: Varians til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{Var}[r(X)] = \mathrm{E}\left[(r(X) - \mu_{r(X)})^2\right] = \begin{cases} \sum_x \left(r(x) - \mu_{r(X)}\right)^2 f(x) & \text{diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(r(x) - \mu_{r(X)}\right)^2 f(x)\mathrm{d}x & \text{kont.} \end{cases}$$

Funksjoner av stokastiske variabler

- ⋆ Forventningsverdi til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{E}[r(X)] = \begin{cases} \sum_x r(x)f(x) & \text{hvis } X \text{ er diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} r(x)f(x)\mathrm{d}x & \text{hvis } X \text{ er kont. SV} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[r(X,Y)] = \begin{cases} \sum_y \sum_x r(x,y)f(x,y) & \text{hvis diskret SV,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{hvis kont. SV} \end{cases}$$

- ⋆ NYTT: Varians til funksjon av stokastiske variabler

$$\mathrm{Var}[r(X)] = \mathrm{E}\left[(r(X)-\mu_{r(X)})^2\right] = \begin{cases} \sum_x \left(r(x)-\mu_{r(X)}\right)^2 f(x) & \text{diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(r(x)-\mu_{r(X)}\right)^2 f(x)\mathrm{d}x & \text{kont.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}[r(X,Y)] = \mathrm{E}\left[(r(X,Y)-\mu_{r(X,Y)})^2\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y \left(r(x,y)-\mu_{r(X,Y)}\right)^2 f(x,y) & \text{diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(r(x,y)-\mu_{r(X,Y)}\right)^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{kont.} \end{cases}$$

Plan for i dag

- ⋆ Kovarians og korrelasjon
  - hvordan samvarierer to stokastiske variabler?
- ⋆ Regneregler for $\mathrm{E}[\cdot]$ og $\mathrm{Var}[\cdot]$
  - spesielt for lineære funksjoner

$f(x, y)$ i eksemplet

- ⋆ Eksempel: Urne med 12 kuler. Tre kuler er røde, fire kuler er gule og fem kuler er blå. Trekk tre kuler (uten tilbakelegging). La X være antall røde kuler trukket og la Y være antall gule kuler trukket.
- ⋆ Kan finne simultanfordelingen til X og Y ved å bruke kombinatorikk (antall gunstige delt på antall mulige).
- ⋆ Kan også finne marginalfordelingene for X og for Y

$y \backslash x$	0	1	2	3	$h(y)$
0	0.0455	0.136	0.068	0.0045	0.254
1	0.182	0.273	0.0545	0	0.5095
2	0.136	0.082	0	0	0.218
3	0.0182	0	0	0	0.0182
$g(x)$	0.382	0.491	0.123	0.0045	1.0