NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **Løsningsskisse TMA4240/TMA4245**

Faglig kontakt under eksamen: Håkon Tjelmeland

Tlf: 48 22 18 96

Eksamensdato: 10. august 2017

Eksamenstid (fra–til): 09.00-13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:
Tabeller og formler i statistikk, Akademika,
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*,
Kalkulator Casio fx-82ES PLUS, CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College eller HP30S,
Gult stemplet A5-ark med egne håndskrevne notater.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes og besvarelsen skal inneholde naturlig mellomregning.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 9

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Kan bestemme c ut fra kravet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\mathrm{d}x = 1.$$

Siden $f(x;\theta) = 0$ for $x < \theta$ får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\mathrm{d}x &= \int_{\theta}^{\infty} c\exp\left\{-(x-\theta)\right\}\mathrm{d}x \\
&= c\left[-\exp\left\{-(x-\theta)\right\}\right]_{x=\theta}^{\infty} \\
&= c\left(-0+e^0\right) = \underline{\underline{c=1}}.
\end{aligned}$$

Sannsynligheten det spørres etter er

$$\begin{aligned}
P(X > \theta+1) &= \int_{\theta+1}^{\infty} f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_{\theta+1}^{\infty} \exp\left\{-(x-\theta)\right\}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\exp\left\{-(x-\theta)\right\}\right]_{x=\theta+1}^{\infty} \\
&= -0+\exp\left\{-(\theta+1-\theta)\right\} = \underline{\underline{e^{-1} = 0.3679}}.
\end{aligned}$$

b) For å finne sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren starter vi med å finne rimelighetsfunksjonen $L(\theta)$. Siden observasjonene er uavhengige, og ved å huske på at hvilken formel som gjelder for $f(x;\theta)$ avhenger av om $x < \theta$ eller $x \geq \theta$, får vi at

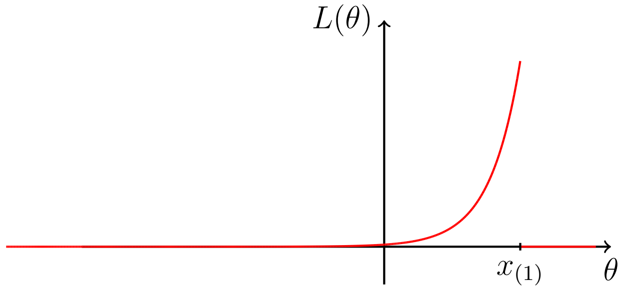
$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} & \text{hvis } x_1,\ldots,x_n \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta\right\} & \text{hvis } \min\{x_1,\ldots,x_n\} \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta\right\} & \text{hvis } \theta \leq x_{(1)}, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}
\end{aligned}$$

der vi har benyttet at alle $x_1,\ldots,x_n \geq \theta$ hvis of bare hvis $\min\{x_1,\ldots,x_n\} \geq \theta$ og at $x_{(1)} = \min\{x_1,\ldots,x_n\}$. Et plott av rimelighetsfunksjonen $L(\theta)$ er vist i figur 1. Vi ser at $L(\theta)$ har sitt maksimum for

$$\theta = x_{(1)} = \min\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren blir dermed

$$\underline{\underline{\widehat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}}}.$$



Figur 1: Skisse av rimelighetsfunksjonen $L(\theta)$ som funksjon av θ.

c) For å finne sannsynlighetstettheten for $W = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ lønner det seg først å finne den tilhørende kumulative fordeling $F_W(w)$,

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq w) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > w) \\
&= 1 - P(X_1 > w \cap X_2 > w \cap \ldots \cap X_n > w) \\
&= 1 - P(X_1 > w) \cdot P(X_2 > w) \cdot \ldots \cdot P(X_n > w) \\
&= 1 - (1 - P(X_1 \leq w)) \cdot (1 - P(X_2 \leq w)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(X_n \leq w)) \\
&= 1 - (1 - F_X(w)) \cdot (1 - F_X(w)) \cdot \ldots \cdot (1 - F_X(w)) \\
&= 1 - (1 - F_X(w))^n .
\end{aligned}$$

Kan da finne sannsynlighetstettheten til W ved å derivere denne med hensyn på w, men først finner ved kumulativ fordeling for X. For $x \geq \theta$ får vi

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{x} e^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x = \left[-e^{-(x-\theta)}\right]_{x=\theta}^{x} = -e^{-(x-\theta)} + e^0 = 1 - e^{-(x-\theta)},$$

mens $F_X(x) = 0$ for $x < \theta$. Sannsynlighetstettheten til W blir da

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= F'_W(w) = -n\,(F_X(w))^{n-1} \cdot (-f_X(w)) \\
&= \begin{cases} n\,(1 - F_X(w))^{n-1} f_X(w) & \text{for } w \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n\left(1 - 1 + e^{-(w-\theta)}\right)^{n-1} e^{-(w-\theta)} & \text{for } w \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \underline{\underline{\begin{cases} ne^{-n(w-\theta)} & \text{for } w \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}}}
\end{aligned}$$

Sannsynligheten det spørres etter blir da

$$\begin{aligned} P(W > \theta + 1) &= \int_{\theta+1}^{\infty} f_W(w)\mathrm{d}w = \int_{\theta+1}^{\infty} ne^{-n(w-\theta)}\mathrm{d}w \\ &= \left[-e^{-n(w-\theta)}\right]_{w=\theta+1}^{\infty} \\ &= -0 + e^{-n(\theta+1-\theta)} = \underline{\underline{e^{-n}}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Finner forventingsverdien til $\widehat{\mu}$ ved å bruke regneregler for forventingsverdi, samt at vi vet at $\mathrm{E}[X_i] = \mathrm{E}[Y_i] = \mu$ for alle i,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\widehat{\mu}\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{X} + \bar{Y}\right)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\bar{X} + \bar{Y}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\left[\bar{X}\right] + \mathrm{E}\left[\bar{Y}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\left[\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \mathrm{E}\left[\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \frac{1}{6}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\mathrm{E}\left[X_i\right] + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\mathrm{E}\left[Y_i\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\mu + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\mu\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\cdot 7\mu + \frac{1}{6}\cdot 6\mu\right) = \mu. \end{aligned}$$

Dermed $\underline{\underline{\text{har vi vist at } \widehat{\mu} \text{ er forventingsrett}}}$.

Ved å benytte regneregler for varians, at X_i'ene og Y_i'ene alle er uavhengige, og at $\mathrm{Var}[X_i] = \mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$ for alle i, får vi at variansen til $\widehat{\mu}$ blir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\widehat{\mu}\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{X}+\bar{Y}\right)\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{Var}\left[\bar{X}+\bar{Y}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{Var}\left[\bar{X}\right] + \mathrm{Var}\left[\bar{Y}\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{Var}\left[\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{7}\right)^2 \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{49}\sum_{i=1}^{7} \mathrm{Var}\left[X_i\right] + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} \mathrm{Var}\left[Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{49}\sum_{i=1}^{7} \sigma^2 + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{7\sigma^2}{49} + \frac{6\sigma^2}{36}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)\sigma^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{6+7}{42}\sigma^2 = \underline{\underline{\frac{13}{168}\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

b) Når $\mu_A = \mu_B$ og $\sigma_A = \sigma_B$ kommer alle $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ fra samme populasjon og man får dermed en forventingsrett estimator med mindre varians ved å estimere μ ved gjennomsnittet av disse variablene, dvs

$$\underline{\underline{\mu^\star = \frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{7} X_i + \sum_{i=1}^{6} Y_i\right)}}.$$

For å sjekke at den er forventingsrett går man tilsvarende som for $\widehat{\mu}$ over,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mu^\star\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{7} X_i + \sum_{i=1}^{6} Y_i\right)\right] = \frac{1}{13}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i + \sum_{i=1}^{6} Y_i\right] \\
&= \frac{1}{13}\left(\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{7} \mathrm{E}\left[X_i\right] + \sum_{i=1}^{6} \mathrm{E}\left[Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{7} \mu + \sum_{i=1}^{6} \mu\right) \\
&= \frac{1}{13}\left(7\mu + 6\mu\right) = \mu.
\end{aligned}$$

Variansen til $\mu^\star$ finner man også tilsvarende som for $\widehat{\mu}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\mu^\star\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{7} X_i + \sum_{i=1}^{6} Y_i\right)\right] = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i + \sum_{i=1}^{6} Y_i\right] \\
&= \frac{1}{13^2}\left(\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{7} X_i\right] + \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{6} Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{13^2}\left(\sum_{i=1}^{7} \mathrm{Var}\left[X_i\right] + \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Var}\left[Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{13^2}\left(\sum_{i=1}^{7} \mathrm{Var}\left[X_i\right] + \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Var}\left[Y_i\right]\right) \\
&= \frac{1}{13^2}\left(\sum_{i=1}^{7} \sigma^2 + \sum_{i=1}^{6} \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{13^2}\left(7\sigma^2 + 6\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{13}.
\end{aligned}
$$

Siden $\mathrm{Var}\left[\widehat{\mu}\right] = \frac{13}{168}\sigma^2 \approx 0.0774\sigma^2$ og $\mathrm{Var}\left[\mu^\star\right] = \frac{\sigma^2}{13} \approx 0.0769\sigma^2$ ser vi at $\mu^\star$ har mindre varians enn $\widehat{\mu}$.

c) For å utlede et konfidensintervall for $\delta = \mu_A - \mu_B$ er det naturlig å ta utgangspunkt i

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$$

som er tilnærmet t-fordelt med

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}}$$

frihetsgrader. Vi har dermed at

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \le \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \le t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\right) = 1 - \alpha.$$

Må så løse hver av ulikhetene inne i sannsynlighetsuttrykket over med hensyn på $\delta = \mu_A - \mu_B$. Starter med den venstre ulikheten,

$$
\begin{aligned}
& -t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \\
\Leftrightarrow \quad & -t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \leq \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B) \\
\Leftrightarrow \quad & -\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \leq -(\mu_A - \mu_B) \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \geq \mu_A - \mu_B \\
\Leftrightarrow \quad & \mu_A - \mu_B \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}
\end{aligned}
$$

Den høyre ulikheten løses tilsvarende,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{X} - \bar{Y} - (\mu_A - \mu_B) \leq t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \\
\Leftrightarrow \quad & -(\mu_A - \mu_B) \leq -\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \\
\Leftrightarrow \quad & \mu_A - \mu_B \geq \bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B
\end{aligned}
$$

Ved å sette de to ulikhetene sammen igjen inne i sannsynlighetsuttrykket får man dermed at

$$
P\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}\right) = 1-\alpha,
$$

slik at et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for $\delta = \mu_A - \mu_B$ er gitt ved

$$
\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}\right].
$$

Innsatt de oppgitte tallene får vi ved å benytte $t_{0.05,9} = 1.833$ at intervallet blir

$$\left[15.22 - 14.56 - 1.833\sqrt{\frac{\frac{0.32}{7-1}}{7} + \frac{\frac{0.47}{6-1}}{6}}, 15.22 - 14.56 - 1.833\sqrt{\frac{\frac{0.32}{7-1}}{7} + \frac{\frac{0.47}{6-1}}{6}}\right]$$

$$= \underline{\underline{[0.3803, 0.9397]}}.$$

d) Vi ønsker å finne ut om resultatene tyder på at metode A gir bedre utmattingsfasthet enn metode B. Hvis metode A er bedre enn metode B vil $\mu_A > \mu_B$ og vi velger derfor dette som vår alternative hypotese, dvs vi skal teste

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu_A > \mu_B.$$

Som testobservator bruker vi

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$$

som, når H_0 er riktig, er tilnærmet t-fordelt med ν frihetsgrader. Antall frihetsgrader ν er gitt ved samme formel som i forrige punkt. Dersom H_1 er riktig vil T tendere til å være stor. Vi forkaster derfor H_0 dersom $T > k$, der kritisk verdi k bestemmes fra det generelle kravet

$$P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ er riktig}) = \alpha.$$

I vår situasjon blir kravet

$$P(T > k | H_0 \text{ er riktig}) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad k = t_{\alpha,\nu}.$$

Dvs. vi forkaster H_0 dersom $T > t_{\alpha,\nu}$.

Innsatt observerte verdier får vi at observert verdi for testobservatoren T blir

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} = \frac{15.22 - 14.56}{\sqrt{\frac{\frac{0.32}{7-1}}{7} + \frac{\frac{0.47}{6-1}}{6}}} = 4.325,$$

mens kritisk verdi når $\alpha = 0.05$ er $k = t_{0.05,9} = 1.833$. Vi har dermed at $t_{\text{obs}} > t_{\alpha,\nu}$ og vi $\underline{\underline{\text{forkaster } H_0}}$.

Oppgave 3

a) La Y være antall infiserte bokser i en k-gruppe. Da er Y binomisk fordelt fordi

- man undersøker k bokser,
- hver boks er enten infisert eller ikke infisert,
- for hver boks er det samme sannsynlighet p for at den er infisert, og
- de ulike boksene er infisert eller ikke infisert uavhengig av hverandre.

Dermed er Y binomisk fordelt med k forsøk og sannsynlighet p for suksess.

En blanding av innholdet i k bokser gir positivt testresultat hvis og bare hvis minst en av de k boksene er infisert, dvs. hvis $Y \geq 1$,

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} = \underline{\underline{1 - (1-p)^k}}.$$

b) Betinget sannsynlighet for en hendelse A gitt en annen hendelse B er definert som

$$\underline{\underline{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}.$$

La Y være antall i en k-gruppe som er infisert og la A være hendelsen at en bestemt boks i denne blandingen er infisert. Da har vi at

$$\underline{\underline{P(A|Y \geq 1)}} = \frac{P(A \cap (Y \geq 1))}{P(Y \geq 1)} = \frac{P(A)}{P(Y \geq q)} = \underline{\underline{\frac{p}{1-(1-p)^k}}}.$$

c) For $i = 1, 2, \ldots, m$ la

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis blandingen fra eske } i \text{ er positiv,} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Fra a) vet vi da at

$$P(Z_i = 1) = 1 - (1-p)^k$$

slik at vi får

$$\mathrm{E}[Z_i] = \sum_{z_i=0}^{1} z_i P(Z_i = z_i) = 0 \cdot P(Z_i = 0) + 1 \cdot P(Z_i = 1) = P(Z_i = 1) = 1 - (1-p)^k.$$

Dessuten har vi at

$$X = \sum_{i=1}^{m} (1 + Z_i \cdot k).$$

Ved å bruke regneregler for forventningsverdi får vi da

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{m}(1+Z_i\cdot k)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\mathrm{E}\left[1+Z_i\cdot k\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(1+k\cdot\mathrm{E}[Z_i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(1+k\left(1-(1-p)^k\right)\right) \\
&= m\left(1+k\left(1-(1-p)^k\right)\right) \\
&= \underline{\underline{m+mk\left(1-(1-p)^k\right)}}.
\end{aligned}$$

Dersom man tester alle boksene enkeltvis vil man trenge mk tester. Man får dermed at den benyttede fremgangsmåten er å foretrekke dersom (for $k=4$)

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}[X] = m + 4m\left(1-(1-p)^4\right) < 4m \\
\Leftrightarrow\ & 4m\left(1-(1-p)^4\right) < 3m \\
\Leftrightarrow\ & 1-(1-p)^4 < \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & -(1-p)^4 < -\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\ & (1-p)^4 > \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\ & 1-p > \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & p-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow\ & p < 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.2929
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Den benyttede fremgangsmåten er dermed å foretrekke dersom } p < 0.2929}}$.