Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:

Arvid Næss	99 53 83 50
Jarle Tufto	99 70 55 19
Ola Diserud	93 21 88 23

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

XX. august 2010
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stempla A5-ark med eigne håndskrevne notat.

Oppgåve 1

La X være ein stokastisk variabel med sannsynstettleik (ST):

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau x} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\ln x-\nu)^2}\,, \quad x > 0\,, \\
&= 0\,, \qquad x \le 0\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

der $\tau > 0$ og ν er reelle tal, og $\ln x$ er den naturlege logaritmen til x.

Dersom ein tek n uavhengige jordprøvar i eit bestemd distrikt, kvar på éin kilo, og kallar det målte nikkelinnhaldet gjeve i mg i dei respektive prøvane $x_1, \ldots, x_n$, har det vist seg at $x_1, \ldots, x_n$ kan reknast som utfall av uavhengige og identisk fordelte stokastiske variablar $X_1, \ldots, X_n$ med ST som gjeve i ligning (1).

a) Vis at når X har ST gjeve ved ligning (1), så er $Y = \ln X$ normalfordelt med forventningsverdi $\nu = \mathrm{E}[Y]$ og varians $\tau^2 = \mathrm{Var}[Y]$.

b) Vis at $F_X(x) = \text{Prob}(X \le x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \nu}{\tau}\right)$, der Φ er den kumulative sannsynsfordelinga til ein stokastisk variabel $Z \sim N(0,1)$.

Innfører ein $Y_j = \ln X_j$, $j = 1, \ldots, n$, vert altså $Y_1, \ldots, Y_n$ uavhengige og identisk fordelte stokastiske variablar, og $Y_j \sim N(\nu, \tau^2)$, $j = 1, \ldots, n$.

c) Gå ut i frå at $\nu = 1.0$ og $\tau = 0.8$. Rekn ut $\text{Prob}(X_1 \le 1.0)$ og $\text{Prob}(X_1 \cdot X_2 \le 1.0)$.

d) Gå fortsatt ut i frå at $\nu = 1.0$ og $\tau = 0.8$ samt at $n = 5$. Kor stor er da sannsynet for at målt nikkelinnhold i minst 4 av 5 jordprøver vert mindre enn 2.72 mg?

e) Vis at

$$\mu = \text{E}[X] = e^{\nu + \tau^2/2} \quad , \quad \sigma^2 = \text{Var}[X] = e^{2\nu}\left(e^{2\tau^2} - e^{\tau^2}\right)$$

Hint: Ein måte å gå fram på, er å innføre $t = (\ln x - \nu)/\tau$ som ny integrasjonsvariabel.

f) Gå ut i frå at ein har målt nikkelinnholdet $x_1, \ldots, x_n$ i n jordprøver og ønsker ein anslagsverdi for μ basert på desse målingane. Ein mogeleg estimator er

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}.$$

Kommentér kort kva for eigenskapar denne estimatoren har, og gjennomfør estimeringa når $n = 10$ og observasjonsmaterialet er som angitt til slutt i denne oppgåva.

g) Eit alternativ til estimatoren $\hat{\mu}$ får ein ved først å bestemme sannsynsmaksimeringsestimatorane (SME) $\hat{\nu}$ og $\hat{\tau}^2$ for ν og τ^2, og så nytte resultatet i punkt e). Bestem $\hat{\nu}$ og $\hat{\tau}^2$. Kva for eigenskaper har desse estimatorane? Angi til slutt en estimator μ^* for μ basert på $\hat{\nu}$ og $\hat{\tau}^2$. Gjennomfør estimeringa av μ når observasjonsmaterialet er som angitt til slutt i oppgåva.

h) Gå ut frå at τ^2 er kjent og lik τ_0^2. På grunnlag av det tilfeldige utvalet $x_1, \ldots, x_n$ ønskjer ein å teste

$$H_0 \; : \mu \le \mu_0$$

mot

$$H_1 \; : \mu > \mu_0$$

der μ_0 er et gjeve tal.

Bruk resultatet i punkt e) til å uttrykke H_0 og H_1 ved hjelp av ν, og vis at testproblemet er ekvivalent med å teste

$$H_0' \; : \nu \le \nu_0$$

mot

$$H_1' \ : \nu > \nu_0$$

der ν_0 er et kjent tal.

Utnytt dette til å angi ein rimelig test for H_0 mot H_1. Velg signifikansnivå α.

i) Utled eit uttrykk for teststyrken for testen i punkt h) under alternativhypotesen $\mu = \gamma\mu_0$ ($\gamma > 1$) når $\alpha = 0.05$, $\tau_0^2 = 0.36$.

Kor stor må n minst være for at testen med eit sannsyn på minst 0.90 forkaster H_0 når $\mu = 1.5\mu_0$?

j) Gå fortsatt ut frå at τ^2 er kjent og lik τ_0^2. Utled først eit $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for ν, og bruk resultatet til å bestemme eit tilsvarende konfidensintervall for μ.

Kva vert konfidensintervallet for μ når $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $\tau_0^2 = 0.36$ og observasjonsmaterialet er som angitt til slutt i oppgåva?

x_j	57	38	150	29	65	44	36	24	51	131
$y_j = \ln x_j$	4.04	3.64	5.01	3.37	4.17	3.78	3.58	3.18	3.93	4.48

Tabell 1: Observasjonsmateriale

$$\sum_{j=1}^{10} y_j = 39.58 \qquad \sum_{j=1}^{10} (y_j - \overline{y})^2 = 3.2360$$