Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

Ingelin Steinsland	92 66 30 96
Jarle Tufto	99 70 55 19
Ola Diserud	93 21 88 23

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

XX. august ~~2010~~ 2011

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notater.

Oppgave 1

a) La A og B betegne to hendelser der $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$. Skraver følgende hendelser i et Venn-diagram,

$$A \cap B, \qquad A \cap B', \quad \text{og} \quad A' \cup B'$$

der A' er komplementærhendelsen til A og tilsvarende med B'.

b) Anta A og B uavhengige hendelser. Vis at da er også A' og B' uavhengige. Hva med A' og B, og A og B'?

Oppgave 2

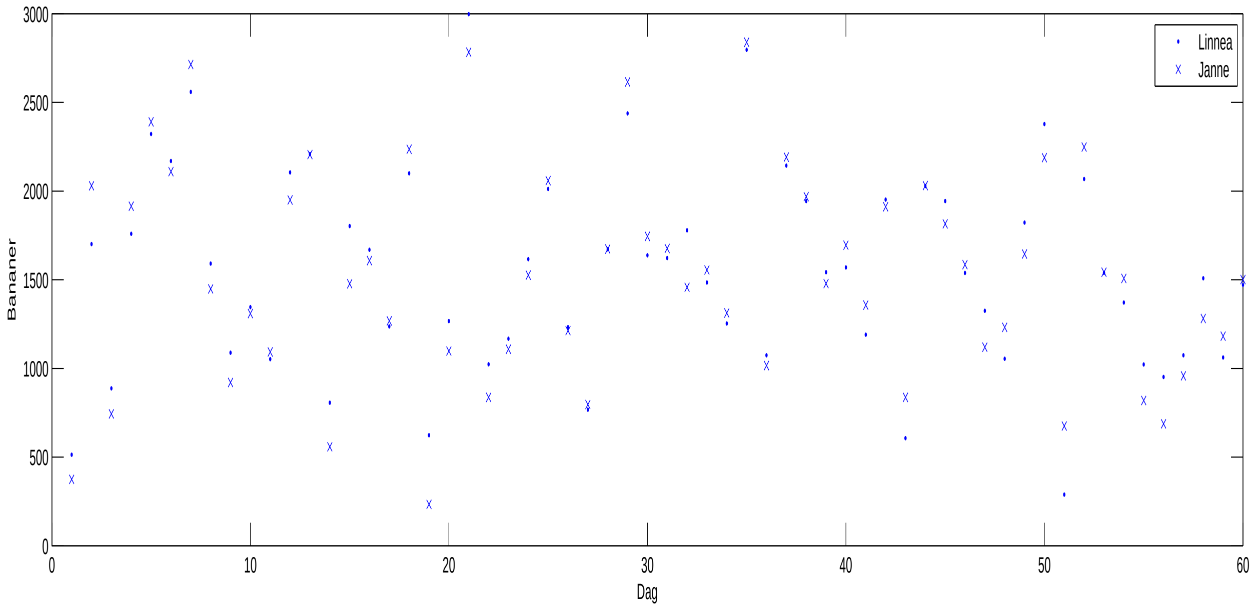
Linnea og Janne har fått sommerjobb som bananskrellere på samme fabrikk. La X betegne antall bananer Linnea skreller i løpet av en dag, og la Y betegne antall bananer Janne skreller pr. dag.

a) Anta at X og Y er uavhengige normalfordelte stokastiske variabler der begge har forventningsverdi 1500 og standardavvik 400.

For en gitt dag, beregn sannsyligheten for at

1. Linnea skreller mer enn 2000 bananer
2. Linnea og Janne tilsammen skreller mer enn 3000 bananer
3. Linnea skreller mer enn dobbelt så mange bananer som Janne

b) Figur 1 viser data for en periode på 60 dager. Ut fra denne figuren, hva vil du si om antagelsene om normalfordelte og uavhengige variabler? Forklar kort hvordan du kan gjøre videre grafiske undersøkelser av disse antakelsene med utgangspunkt i de oppgitte data.



Figur 1: Data for antall skrelte bananer over en periode på 60 dager.

Oppgave 3 Kabelproduksjon

En fabrikk produserer kabel og fra tid til annen oppstår det feil på den produserte kabelen. La Z betegne lengden (i kilometer) på kabelen mellom to etterfølgende feil. Vi skal anta at feilene oppstår uavhengig av hverandre, dvs. at påfølgende observasjoner av Z langs kabelen, $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$, er uavhengige stokastiske variabler.

Av erfaring vet en at lengden mellom to etterfølgende feil er eksponensialfordelt med parameter λ, dvs. Z har sannsynlighetstetthet

$$f(z;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} & \text{for } z > 0, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(z;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z} & \text{for } z > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Anta i dette punktet at $\lambda = 0.05$.

Hva er sannsynligheten for at lengden mellom to etterfølgende feil er mer enn 10 kilometer?

Dersom man har observert at de første 10 kilometrene er feilfrie, hva er da sannsynligheten for at også de neste 10 kilometrene er feilfrie?

I resten av oppgaven skal vi anta at λ er en ukjent parameter. Ved hjelp av fabrikkens opptegnelser over tidligere feil på kabelen ønsker vi å estimere λ. Men det viser seg dessverre at fabrikken ikke har notert nøyaktig lengde på kabelen mellom hver feil, i stedet er det kun notert antall hele kilometer, M, med kabel mellom hver feil. Dvs, dersom $Z < 1.0$ har fabrikken notert seg $M = 0$, dersom $1.0 \leq Z < 2.0$ har fabrikken notert seg $M = 1$, dersom $2.0 \leq Z < 3.0$ har fabrikken notert seg $M = 2$, osv.

b) Vis at punktsannsynligheten for M blir

$$\mathrm{P}(M = m) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda m} \quad \text{for} \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Oppgave 4 Levetid av ventiler

Levetiden T (målt i antall døgn) til en ny type ventiler som benyttes på oljeplattformer i Nordsjøen, skal undersøkes. Det antas at T kan modelleres som en eksponensialfordelt tilfeldig variabel. Det er velkjent at levetidene er avhengig av blant annet temperatur og trykk der ventilene benyttes, og den kjemiske sammensetningen av oljen som går gjennom ventilene. Effekten av disse forholdene måles som en *stress*-faktor, z, og en vet av erfaring at

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mu}{z}$$

Parameteren μ er altså karakteristisk for en bestemt type ventiler, mens z beskriver miljøet der en ventil benyttes. Levetidene til forskjellige ventiler antas uavhengige.

a) Anta i dette punktet at $\mu = 1000$.

For en ventil med stress-faktor $z = 2.0$, bestem $\mathrm{P}(T \leq 1000)$.

Bestem hvilken stress-faktor en ventil må operere under for at $\mathrm{P}(T \leq 1000) = 0.5$.

Betrakt to ventiler med stress-faktorer henholdsvis $z_1 = 1.0$ og $z_2 = 2.0$ og tilhørende levetider T_1 og T_2. Bestem $\mathrm{P}(T_2 \geq T_1)$.

For å undersøke kvaliteten på den nye typen ventiler har man prøvd ut $n = 10$ ventiler. La $z_1, z_2, \ldots, z_n$ betegne stress-faktorene som disse ventilene opererer under og la $T_1, T_2, \ldots, T_n$ betegne tilhørende levetider. De observerte verdier er gitt i følgende tabell:

Ventil i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	1.0	3.4	1.9	2.4	1.2	4.0	3.2	2.2	1.4	3.2
t_i	917	610	978	326	609	88	488	591	2170	28

Det oppgis at $\sum_{i=1}^{n} z_i t_i = 12703.8$.

b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for μ er gitt ved

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i T_i$$

Er estimatoren forventningsrett? Finn også $\mathrm{Var}(\widehat{\mu})$.

c) Sett opp den moment-genererende funksjon for T_i. Benytt så denne til å vise at

$$V = \frac{2n\widehat{\mu}}{\mu}$$

er χ^2-fordelt med $2n$ frihetsgrader. (Hint: Du kan benytte oppgitte formler for moment-generende funksjoner for eksponensial- og χ^2-fordelingene i formelsamlingen.)

d) Benytt resultatet i punkt **c**) til å utlede et $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for μ. Hva blir konfidensintervallet når $\alpha = 0.10$ og dataene er som gitt over?