Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4265 Stokastiske Prosesser**

Faglig kontakt under eksamen: Andrea Riebler

Tlf: 4568 9592

Eksamensdato: August 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:

- Kalkulator HP30S, CITIZEN SR-270X eller CITIZEN SR-270X College, Casio fx-82ES PLUS med tomt minne.
- Statistiske tabeller og formler, Tapir.
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling.
- Et gult, stemplet A5 ark med egne håndskrevne notater.

Annen informasjon:

- Alle svar må grunngis.
- Du kan skrive besvarelsen på engelsk og/eller norsk.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

En maskin blir inspisert ukentlig, og ved hver inspeksjon er tilstanden til maskinen blant de følgende tre tilstandene:

- 0: perfekt
- 1: grei
- 2: ødelagt

En maskin i perfekt tilstand er fortsatt perfekt etter én uke med sannsynlighet 0.7, og er i grei tilstand med sannsynlighet 0.2. En maskin i grei tilstand er fortsatt i grei tilstand etter én uke med sannsynlighet 0.6, og er ødelagt med sannsynlighet 0.4. En ødelagt maskin fungerer ikke og kan ikke bli reparert. Den forblir i ødelagt tilstand.

a)
- Formuler en Markovkjede som beskriver tilstandene til maskinen. Finn overgangsmatrisen som beskriver markovkjeden og tegn det tilhørende overgangsdiagrammet.
- Bestem ekvivalensklassene og avgjør hvilke tilstander som er rekurrente og hvilke tilstander som er transiente. Begrunn svaret ditt.

b) Maskinen er ny denne uken, det vil si at $X_0 = 0$. Regn ut

- $P(X_3 \neq 2, X_1 \neq 1 | X_0 = 0)$
- $P(X_4 = 2 | X_2 = 0, X_0 = 0)$
- Sannsynligheten for at maskinen aldri kommer til å befinne seg i tilstand 1.

c) Anta igjen at maskinen er ny denne uken, slik at $X_0 = 0$, og definer den stokastiske variabelen

$$T = \min\{n \geq 1 : X_n = 2\}.$$

Beskriv to forskjellige strategier som kan benyttes for å finne forventningsverdien $E(T)$.

Bruk **én** av disse strategiene til å beregne verdien til $E(T)$.

Oppgave 2

Kunder ankommer et ekspedisjonskontor som en Poisson-prosess med rate $\lambda = 3$ per time. La $N(t)$ betegne antall kunder ved tid t. La T_i betegne tiden mellom ankomst av kunde $i-1$ og kunde i, og la $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

a) Finn

- $E(T_2)$
- $P(N(1) = 3)$
- $E(S_{14}|N(3) = 8)$

b) Kontoret åpner klokken 8:00. Hva er fordelingen til tiden kundebehandleren Oscar må vente før første kunde ankommer?

Anta at Oscar forsov seg og kom til kontoret klokken 10:00. Hva er sannsynligheten for at ingen kunder ankom i perioden mellom 8:00 og 10:00?

c) Kontoret åpner 8:00. Anta at Oscar ankommer på et uniformt fordelt tidspunkt mellom 8:00 og 9:30. Hva er det forventede antall kunder som ankommer før Oscar har kommet til kontoret?

Oppgave 3

Resturantkjeden «Shake Shack» i New York by sies å ha utmerkede hamburgere. De har en liten matbod in Madison Square Park. Anta at det er én ansatt som lager fersk mat til kundene. Kundene ankommer køsystemet som en Poisson-prosess med intensitet $\lambda = 20$ (per time). En kunde som finner n personer i køsystemet når han ankommer blir med i køsystemet med sannsynlighet

$$\alpha_n = \frac{4-n}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Kundene i køsystemet blir behandlet i den rekkefølgen de ankom og behandlingstidene antas å være uavhengige og eksponentialfordelte med forventet behandlingstid lik 3 minutter, det vil si en rate på $\mu = 20$ (per time). Videre antar vi at kundenes behandlingstider er uavhengige av ankomstprosessen.

La $X(t)$ betegne antall kunder i systemet (inkludert den som blir behandlet) ved tid t. Anta at $X(0) = 0$.

a) Forklar hvorfor $X(t)$ er en fødsels-døds-prosess og angi fødsels- og dødsratene.

I de gjenstående punktene, uttrykk først svaret som en funksjon av λ og μ, og beregn deretter det numeriske svaret med de angitte parameterverdiene.

b) Hvis vi starter ved tid 0, hva er forventet tid til $X(t) = 2$ for første gang?

Hva er sannsynligheten for at første kunde har forlatt køsystemet før neste kunde ankommer?

c) Utled grensesannsynlighetene til $X(t)$ og vis at de er gitt ved

$$P_0 = \frac{32}{103} \qquad P_1 = \frac{32}{103} \qquad P_2 = \frac{24}{103} \qquad P_3 = \frac{12}{103} \qquad P_4 = \frac{3}{103}$$

d) I det lange løp:

- Hva er sannsynligheten for at en kunde som ankommer blir del av køsystemet og ikke forlater køen umiddelbart?
- Hva er det forventede antall kunder i køsystemet?
- Bruk Littles formel til å beregne forventet tid en kunde (som blir med i køsystemet) totalt tilbringer i køsystemet.

Formulas for TMA4265 Stochastic Processes:

The law of total probability

Let $B_1, B_2, \ldots$ be pairwise disjoint events with $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Then

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Discrete time Markov chains

Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For an irreducible and ergodic Markov chain, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ exist and is given by the equations

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{and} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transient states i, j and k, the expected time spent in state j given start in state i, s_{ij}, is

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transient states i and j, the probability of ever returning to state j given start in state i, f_{ij}, is

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

The Poisson process

The waiting time to the n-th event (the n-th arrival time), S_n, has the probability density

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Given that the number of events $N(t) = n$, the arrival times $S_1, S_2, \ldots, S_n$ have the joint probability density

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markov processes in continuous time

A (homogeneous) Markov process $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, with state space $\Omega \subseteq \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, is called a birth and death process if

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h) \\ P_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h) \\ P_{i,i}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \\ P_{ij}(h) &= o(h) \quad \text{for } |j-i| \geq 2 \end{aligned}$$

where $P_{ij}(s) = P(X(t+s) = j | X(t) = i)$, $i, j \in \mathbf{Z}^+$, $\lambda_i \geq 0$ are birth rates, $\mu_i \geq 0$ are death rates.

The Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Limit relations

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i \,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij} \,, \;\; i \neq j$$

Kolmogorov's forward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's backward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

If $P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ exist, P_j are given by

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{and} \quad \sum_j P_j = 1.$$

In particular, for birth and death processes

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{and} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

where

$$\theta_0 = 1 \quad \text{and} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Queueing theory

For the average number of customers in the system L, in the queue L_Q; the average amount of time a customer spends in the system W, in the queue W_Q; the service time S; the average remaining time (or work) in the system V, and the arrival rate λ_a, the following relations obtain

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Some mathematical series

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad .$$