Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4265 Stokastiske prosesser**

Faglig kontakt under eksamen: Andrea Riebler
Tlf: 4568 9592

Eksamensdato: 16. desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:

- Kalkulator CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College eller HP30S.
- Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
- K. Rottman: Matematisk formelsamling.
- Ett gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag).

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes.
Løsningene kan skrives på engelsk og/eller norsk.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 6
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

I denne oppgaven ser vi på Markovkjeden med overgangsmatrise

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a)
- Tegn tilstandsdiagrammet for Markovkjeden og bestem ekvivalensklassene.
- Hvilke tilstander er rekurrente og hvilke tilstander er transiente? Begrunn svaret.
- Regn ut følgende sannsynligheter:

$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 1, X_2 = 2) \quad \text{og} \quad P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$$

b)
- Regn ut sannsynligheten for absorpsjon i tilstand 0 hvis Markovkjeden starter i tilstand 1.
- Anta at Markovkjeden starter i tilstand 1 og regn ut forventet tid tilbrakt i hver av tilstandene 1 og 2 før absorpsjon i tilstand 0 eller 3.

Oppgave 2

La $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ betegne en forgreningsprosses der hvert nytt individ får avkom uavhengig av alle andre individer. X_n betegner antall individer i generasjon n og vi antar at $X_0 = 1$. På slutten av sin levetid har hvert individ fått ingen avkom med sannsynlighet $P_0 = \frac{1}{8}$, ett avkom med sannsynlighet $P_1 = \frac{1}{2}$ og to avkom med sannsynlighet $P_2 = \frac{3}{8}$.

a)
- Forklar hvorfor denne prosessen danner en Markovkjede.
- Utled tilstandsrommet. Hvilke tilstander er transiente og hvilke tilstander er rekurrente?

b) Beregn forventet antall avkom per individ. Hva er sannsynligheten for at populasjonen dør ut?

Oppgave 3

Antall utbetalinger på livsforsikringspoliser hos et forsikringsselskap følger en Poisson-prosess med rate $\lambda = 6$ utbetalinger per uke. La $N(t)$ være antall utbetalinger ved tid t (målt i uker) og anta at $N(0) = 0$.

a)
- Hva er forvented tid til den femtende utbetalingen?
- Regn ut $E(N(4) - N(2) \mid N(1) = 5)$
- Regn også ut $P(N(3) \geq 12)$.

Anta at beløpet på hver utbetaling er eksponentialfordelt med forventningsverdi 12000 kroner. Anta videre at hver utbetaling er uavhengig av de andre utbetalingene og uavhengig av det totale antall utbetalinger.

b) Hva er forventningsverdi og varians for det totale beløpet utbetalt over en fire ukers periode.

Oppgave 4

Skiskyting betegner vinteridrettsgrenen som kombinerer langrenn og skyting. Anta at beboerene i Oslo ønsker å forbedre sine ferdigheter i skiskyting og drar til et populært skianlegg for å trene. Ved skianlegget er det et stadion med tre offentlige skytestasjoner. Skiløpere ankommer stadionet som en Poisson-prosses med rate 5 skiløpere per minutt, det vil si $\lambda = 1/12$ skiløpere per sekund. Hvis en av skytestasjonene er ledige begynner skiløperen umiddelbart å skyte og forlater deretter direkte stadionet etter at han er ferdig. Hvis alle skytestasjonene er opptatte venter skiløperen i kø til en av skytestasjonene blir ledig. Tiden hver skiløper tilbringer på skytestasjonen er uavhengig av de andre skiløperene og er eksponentialfordelt med forventningsverdi 30 sekunder, det vil si med rate $\mu = 1/30$.

La $X(t)$ betegne antall skiløpere på stadionet ved tid t, det vil si antall skiløpere som enten holder på å skyte eller venter i kø på at en av skytestasjonene skal bli tilgjengelig. Vi antar at $X(0) = 0$.

a)
- Forklar kort hvorfor $X(t)$ er en fødsels- og dødsprosess og oppgi alle fødsels- og dødsratene.
- Hvis $X(t) = 3$, hva er forventet tid til alle de tre skiløperene har skutt ferdig?

b) Hva er forventet tid til $X(t) = 3$ for første gang hvis vi starter ved tid 0?

I de gjenstående spørsmålene, uttrykk først svaret som en funksjon av λ og μ. Beregn deretter det numeriske svaret ved å bruke de oppgitte parameterverdiene.

c)
- Utled grensefordelingen for $X(t)$.
  (Du kan bruke: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, hvis $|a| < 1$.)
- Finn andelen av skiløpere som kan starte å skyte umiddelbart etter ankomst (det vil si uten først å måtte vente til en av skytestasjonene blir ledig)?

d)
- Regn ut forventet antall skiløpere på stadionet (etter en lang tid).
- Bruk Littles formel til å finne forventet tid hver skiløper bruker på stadionet.

Formulas for TMA4265 Stochastic Processes:

The law of total probability

Let $B_1, B_2, \ldots$ be pairwise disjoint events with $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Then

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Discrete time Markov chains

Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For an irreducible and ergodic Markov chain, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ exist and is given by the equations

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{and} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transient states i, j and k, the expected time spent in state j given start in state i, s_{ij}, is

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transient states i and j, the probability of ever returning to state j given start in state i, f_{ij}, is

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

The Poisson process

The waiting time to the n-th event (the n-th arrival time), S_n, has the probability density

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Given that the number of events $N(t) = n$, the arrival times $S_1, S_2, \ldots, S_n$ have the joint probability density

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markov processes in continuous time

A (homogeneous) Markov process $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, with state space $\Omega \subseteq \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, is called a birth and death process if

$$P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$$

$$P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$$

$$P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$$

$$P_{ij}(h) = o(h) \quad \text{for } |j - i| \geq 2$$

where $P_{ij}(s) = P(X(t+s) = j | X(t) = i)$, $i, j \in \mathbf{Z}^+$, $\lambda_i \geq 0$ are birth rates, $\mu_i \geq 0$ are death rates.

The Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Limit relations

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i \,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij} \,, \ \ i \neq j$$

Kolmogorov's forward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's backward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

If $P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ exist, P_j are given by

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{and} \quad \sum_j P_j = 1.$$

In particular, for birth and death processes

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{and} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

where

$$\theta_0 = 1 \quad \text{and} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Queueing theory

For the average number of customers in the system L, in the queue L_Q; the average amount of time a customer spends in the system W, in the queue W_Q; the service time S; the average remaining time (or work) in the system V, and the arrival rate λ_a, the following relations obtain

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Some mathematical series

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad .$$