Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4265 Stokastiske prosesser**

Fagleg kontakt under eksamen: Andrea Riebler
Tlf: 4568 9592

Eksamensdato: 16. desember 2013
Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C:

- Kalkulator CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College eller HP30S.
- Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
- K. Rottman: Matematisk formelsamling.
- Eit gult A5-ark med egne håndskrivne notatar (stempla av Institutt for matematiske fag).

Annan informasjon:
Grunngje alle svar.
Løysingane kan skrivast på engelsk og/eller norsk.

Målform/språk: nynorsk
Sidetal: 6
Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1

I denne oppgåva ser vi på Markovkjeda med overgangsmatrise

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

a)
- Teikn tilstandsdiagrammet for Markovkjeda og bestem ekvivalensklassane.
- Kva tilstandar er rekurrente og kva tilstander er transiente? Grunngje svaret.
- Rekn ut følgjande sannsyn:

$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 1, X_2 = 2) \quad \text{og} \quad P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$$

b)
- Rekn ut sannsynet for absorpsjon i tilstand 0 dersom Markovkjeda startar i tilstand 1.
- Anta at Markovkjeda startar i tilstand 1 og rekn ut forventa tid oppheldt i kvar av tilstandane 1 og 2 før absorpsjon i tilstand 0 eller 3.

Oppgåve 2

La $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ vere ein forgreiningsprosses der kvart nytt individ får avkom uavhengig av alle andre individ. X_n er talet på individ i generasjon n og vi antar at $X_0 = 1$. På slutten av si levetid har kvart individ fått ingen avkom med sannsyn $P_0 = \frac{1}{8}$, eit avkom med sannsyn $P_1 = \frac{1}{2}$ og to avkom med sannsyn $P_2 = \frac{3}{8}$.

a)
- Forklar kvifor denne prosessen dannar ein Markovkjede.
- Utlei tilstandsrommet. Kva tilstandar er transiente og kva tilstandar er rekurrente?

b) Berekn forventa tal på avkom per individ. Kva er sannsynet for at populasjonen døyr ut?

Oppgåve 3

Talet på utbetalingar på livstrygdingspolis hos eit forsikringsselskap følgjer ein Poisson-prosess med rate $\lambda = 6$ utbetalingar per veke. La $N(t)$ vere talet på utbetalingar ved tid t (målt i veker) og anta at $N(0) = 0$.

a)
- Kva er forventa tid til den femtande utbetalinga?
- Rekn ut $E(N(4) - N(2) \mid N(1) = 5)$
- Rekn òg ut $P(N(3) \geq 12)$.

Anta at beløpet på kvar utbetaling er eksponentialfordelt med forventningsverdi 12000 kroner. Anta vidare at kvar utbetaling er uavhengig av dei andre utbetalingana og uavhengig av det totale talet på utbetalingar.

b) Kva er forventningsverdi og varians for det totale beløpet utbetalt over ein fire vekers periode.

Oppgåve 4

Skiskyting er ei vinteridrettsgrein som kombinerar langrenn og skyting. Anta at innbyggarane i Oslo ynskjer å bli betre i skiskyting og drar til eit populært skianlegg for å trene. Ved skianlegget er det eit stadion med tre offentlege skytestasjonar. Skiløparar kjem frem til stadionet som ein Poisson-prosses med rate 5 skiløparar per minutt, det vil seie $\lambda = 1/12$ skiløparar per sekund. Dersom ein av skytestasjonane er ledige begynner skiløparen augeblikkeleg å skyte og forlèt deretter direkte stadionet etter at han er ferdig. Dersom alle skytestasjonane er opptekne ventar skiløparen i kø til ein av skytestasjonane blir ledig. Tida kvar skiløpar oppheld seg på skytestasjonen er uavhengig av dei andre skiløparane og er eksponentialfordelt med forventningsverdi 30 sekunder, det vil seie med rate $\mu = 1/30$.

La $X(t)$ betekne talet på skiløparar på stadionet ved tid t, det vil seie talet på skiløparar som anten held på å skyte eller ventar i kø på at ein av skytestasjonane skal bli tilgjengeleg. Vi antar at $X(0) = 0$.

a)
- Forklar kort kvifor $X(t)$ er ein fødsels- og dødsprosess og oppgje alle fødsels- og dødsratane.
- Dersom $X(t) = 3$, kva er forventa tid til alle dei tre skiløparane har skote ferdig?

b) Kva er forventa tid til $X(t) = 3$ for første gang dersom vi startar ved tid 0?

I spørsmåla som står igjen, uttrykk først svaret som ein funksjon av λ og μ. Rekn deretter det numeriske svaret ved å nytte dei oppgjevne parameterverdiane.

c)

- Utlei grensefordelinga for $X(t)$.
  (Du kan nytte: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, viss $|a| < 1$.)
- Finn delen av skiløparar som kan starte å skyte augeblikkeleg etter framkomst (det vil seie uten først å måtte vente til ein av skytestasjonane blir ledig)?

d)

- Rekn ut forventa tal på skiløparar på stadionet (etter ei lang tid).
- Bruk Littles formel til å finne forventa tid kvar skiløpar nyttar på stadionet.

Formulas for TMA4265 Stochastic Processes:

The law of total probability

Let $B_1, B_2, \ldots$ be pairwise disjoint events with $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Then

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Discrete time Markov chains

Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For an irreducible and ergodic Markov chain, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ exist and is given by the equations

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{and} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transient states i, j and k, the expected time spent in state j given start in state i, s_{ij}, is

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transient states i and j, the probability of ever returning to state j given start in state i, f_{ij}, is

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

The Poisson process

The waiting time to the n-th event (the n-th arrival time), S_n, has the probability density

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Given that the number of events $N(t) = n$, the arrival times $S_1, S_2, \ldots, S_n$ have the joint probability density

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markov processes in continuous time

A (homogeneous) Markov process $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, with state space $\Omega \subseteq \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, is called a birth and death process if

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h) \\ P_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h) \\ P_{i,i}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) \\ P_{ij}(h) &= o(h) \quad \text{for } |j - i| \geq 2 \end{aligned}$$

where $P_{ij}(s) = P(X(t+s) = j | X(t) = i)$, $i, j \in \mathbf{Z}^+$, $\lambda_i \geq 0$ are birth rates, $\mu_i \geq 0$ are death rates.

The Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Limit relations

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i \,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij} \,, \ \ i \neq j$$

Kolmogorov's forward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's backward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

If $P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ exist, P_j are given by

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{and} \quad \sum_j P_j = 1.$$

In particular, for birth and death processes

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{and} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

where

$$\theta_0 = 1 \quad \text{and} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Queueing theory

For the average number of customers in the system L, in the queue L_Q; the average amount of time a customer spends in the system W, in the queue W_Q; the service time S; the average remaining time (or work) in the system V, and the arrival rate λ_a, the following relations obtain

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Some mathematical series

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad .$$