NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4265 Stokastiske Prosesser**

Faglig kontakt under eksamen: Jo Eidsvik

Tlf: 901 27 472

Eksamensdato: Desember 1, 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:

- Kalkulator CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College, HP30S, Casio fx-82ES PLUS med tomt minne.
- Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag.
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling.
- Ett gult, stemplet A5 ark med håndskrevne formler og notater.

Annen informasjon:
Begrunn alle svar.
Alle ti delspørsmål teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 3

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

Det er risiko for snøskred flere steder i Norge. Når veldig store snømasser kollapser, kan skred gi kritiske ødeleggelser. Vi beskriver her risiko (snømasser) med fire kategorier: liten (1), medium (2), stor (3) og veldig stor (4). Om vinteren har risiko eller snømasser en tendens til å være uendret, øke eller kollapse. Risikoklasse X_t for dag $t = 0, 1, 2, 3, ..,$ blir her modellert med følgende Markov transisjonsmatrise:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array},$$

der element $P(i,j) = P(X_t = j | X_{t-1} = i)$.

a)

Regn ut $P(X_2 = 2, X_1 = 1 | X_0 = 1)$.

Regn ut $P(X_2 = 2 | X_0 = 1)$.

Anta at risikoen er veldig stor. Hva er sannsynlighetsfordelingen for tid til kollaps, og hva er forventet tid til kollaps?

b)

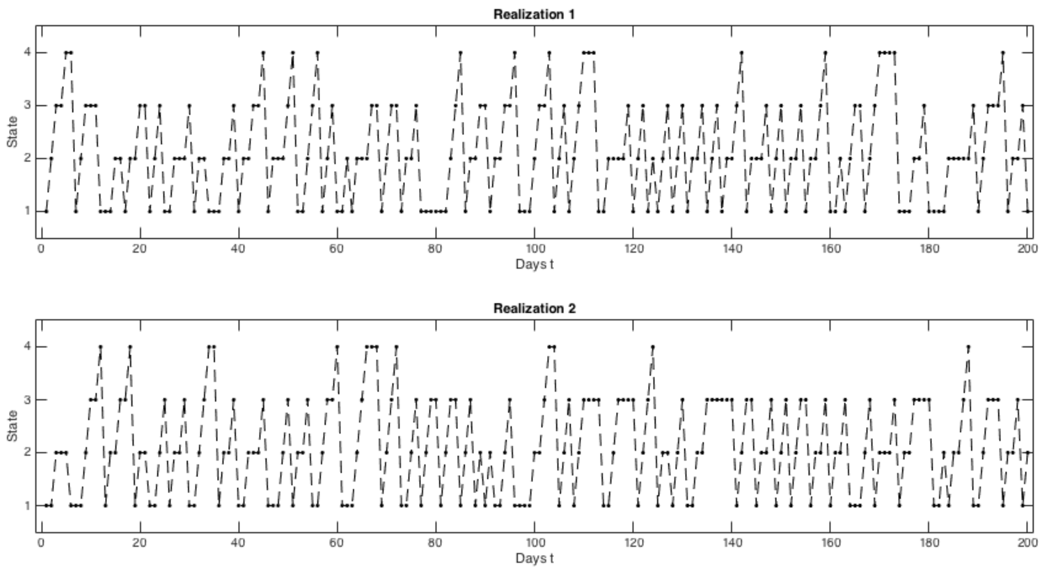
Finn lang-tids fordelingen for de ulike risikoklassene.

Hva er sannsynligheten for at risiko var veldig stor i går (tid $t-1$) dersom den er liten i dag (tid t)?

c)

Regn ut lang-tids andelen av tiden der risiko øker direkte gjennom alle klassene, dvs $X_t = 1$, $X_{t+1} = 2$, $X_{t+2} = 3$, $X_{t+3} = 4$.

Figur 1 viser realisasjoner av risikoprosessen for to vintre. Sammenlign de realiserte andelene av direkte økende risiko med det teoretiske resultatet.



Figur 1: To realisasjoner av prosessen for risiko for snøskred.

d)

Anta $X_0 = 1$. Regn ut forventet tid til risiko første gang når klasse 4.

e)

På et spesielt sted, langs en jernbanelinje, kan man måle risikoen med en automatisk sensor. Målingen, Y_t, gir ikke perfekt informasjon om risikoklassen X_t. Den er kontinuerlig fordelt, og avhenger kun av risikoen på tiden da målingen blir gjort. Gitt at risikoen $X_t = k$, så er målingen Gaussisk fordelt, $\mathrm{N}(k, 1)$, dvs at sannsynlighetstettheten er

$$p(y_t | X_t = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_t - k)^2}{2}\right).$$

Målingen er $Y_t = 3.2$, hva er sannsynligheten for at risiko er $X_t = 4$?

Målingen er $Y_t = 3.2$, hva er sannsynligheten for at risiko ved tid $t + 1$ er veldig stor?

Oppgave 2

Ankomster til et parkeringshus beskrives ved en Poissonprosess med rate $\lambda = 0.5$ (tid t er i minutter).

a)

Parkeringshuset åpner kl 8:00. Hva er sannsynligheten for at ingen kunder har kommet kl 8:05?

Hva er forventet antall kunder som har kommet de første 15 minuttene?

Gitt at to kunder kom de første 10 minuttene, hva er sannsynligheten for at ingen kom de første 5 minuttene?

b)

Kundene sine parkeringstider er uavhengige. Forventet betaling for en vilkårlig kunde er 100 kr, med standardavvik 10 kr.

Regn ut forventet inntekt til parkeringshuset i løpet av dagen (08:00-16:00).

Regn ut variansen til inntekten i løpet av dagen (08:00-16:00).

I en mer realistisk situasjon vil kunder også forlate parkeringshuset. Vi antar uavhengig ankomster til parkeringshuset, beskrevet ved Poissonprosessen ovenfor. Videre antar vi at kunder sine oppholdstider i parkeringshuset er uavhengige og eksponensialfordelte med forventning $1/\mu$. Sett her $\mu = 1/30 = 0.0333$. Antall kunder $N(t)$ i parkeringshuset ved tid t kan da modelleres ved en fødsels-og-døds prosess. Maksimal kapasitet for parkeringshuset er $N_{\text{max}} = 20$. Dersom det er 20 kunder i parkeringshuset, så vil ankommende kunder bare kjøre forbi, uten å forme en kø.

c)

Finn fødsels- og dødsratene i denne prosessen.

Tegn et overgangsdiagram for prosessen (transition diagram).

Parkeringshuset stenger. De mottar ikke flere kunder, men de som er der ved stengetid vil forlate huset med rater som beskrevet ovenfor. Det er to kunder i parkeringshuset ved stengetid. Finn sannsynlighetstettheten til ventetiden til parkeringshuset er tomt.

d)

Bruk likhet i lang-tids prosessrate inn og ut av tilstander til å finne et uttrykk for lang-tids sannsynlighetene for prosessen. Regn ut $P_{20} = \lim_{t\to\infty} P(N(t) = 20)$.

Regn ut forventet lang-tids antall kunder i parkeringshuset; $E(N)$.

(Hint: Du kan slå opp sannsynligheter i Poissonfordelingen i tabell. Hvis X er Poissonfordelt med parameter ν har vi $P(X = i) = e^{-\nu}\frac{\nu^i}{i!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.)

e)

Miljøhensyn gjør at myndighetene dobler avgiften for parkering per minutt. Eieren av parkeringshuset tror dette vil gi lavere ankomstrate av kunder. Anta at kundene tilbringer i gjennomsnitt samme tid i parkeringshuset som beskrevet ovenfor. Anta videre at kapasiteten i parkeringshuset aldri vil bli nådd i dette tilfellet.

Regn ut ny ankomstrate som gjør at forventet lang-tids inntekt blir den samme som før. (Ta for gitt en forventning $E(N)$ som løsning på oppgave 2d.)

Formulas for TMA4265 Stochastic Processes:

The law of total probability

Let $B_1, B_2, \ldots$ be pairwise disjoint events with $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Then

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Discrete time Markov chains

Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For an irreducible and ergodic Markov chain, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ exist and is given by the equations

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{and} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transient states i, j and k, the expected time spent in state j given start in state i, s_{ij}, is

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transient states i and j, the probability of ever returning to state j given start in state i, f_{ij}, is

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

The Poisson process

The waiting time to the n-th event (the n-th arrival time), S_n, has the probability density

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Given that the number of events $N(t) = n$, the arrival times $S_1, S_2, \ldots, S_n$ have the joint probability density

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markov processes in continuous time

A (homogeneous) Markov process $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, with state space $\Omega \subseteq \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, is called a birth and death process if

$$P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$$
$$P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$$
$$P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$$
$$P_{ij}(h) = o(h) \quad \text{for } |j - i| \geq 2$$

where $P_{ij}(s) = P(X(t + s) = j | X(t) = i)$, $i, j \in \mathbf{Z}^+$, $\lambda_i \geq 0$ are birth rates, $\mu_i \geq 0$ are death rates.

The Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}(t + s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Limit relations

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i\,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}\,, \;\; i \neq j$$

Kolmogorov's forward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's backward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

If $P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ exist, P_j are given by

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{and} \quad \sum_j P_j = 1.$$

In particular, for birth and death processes

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{and} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

where

$$\theta_0 = 1 \quad \text{and} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Queueing theory

For the average number of customers in the system L, in the queue L_Q; the average amount of time a customer spends in the system W, in the queue W_Q; the service time S; the average remaining time (or work) in the system V, and the arrival rate λ_a, the following relations obtain

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Some mathematical series

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad .$$