Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4265 Stokastiske Prosesser**

Fagleg kontakt under eksamen: Jo Eidsvik

Tlf: 901 27 472

Eksamensdato: Desember 1, 2016

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C:

- Kalkulator CITIZEN SR-270X, CITIZEN SR-270X College, HP30S, Casio fx-82ES PLUS med tomt minne.
- Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag.
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling.
- Eit gult, stempla A5 ark med handskrevne formlar og notat.

Annan informasjon:
Begrunn alle svar.
Alle ti delspørsmål tel like mykje.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 4

Sidetal vedlegg: 3

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

Det er risiko for snøskred fleire stadar i Noreg. Når veldig store snømassar kollapsar, kan skred øydeleggje. Vi beskriv her risikoen (snømassar) med fire kategoriar: liten (1), medium (2), stor (3) og veldig stor (4). Om vinteren har risikoen eller snømassar ein tendens til å vere uendra, auke eller kollapse. Risikoklasse X_t for dag $t = 0, 1, 2, 3, ..$, vert her modellert med følgjande Markov transisjonsmatrise:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array},$$

der element $P(i, j) = P(X_t = j|X_{t-1} = i)$.

a)

Rekn ut $P(X_2 = 2, X_1 = 1|X_0 = 1)$.

Rekn ut $P(X_2 = 2|X_0 = 1)$.

Vi antek at risikoen er veldig stor. Kva er sannsynfordelinga for tid til kollaps, og kva er forventa tid til kollaps?

b)

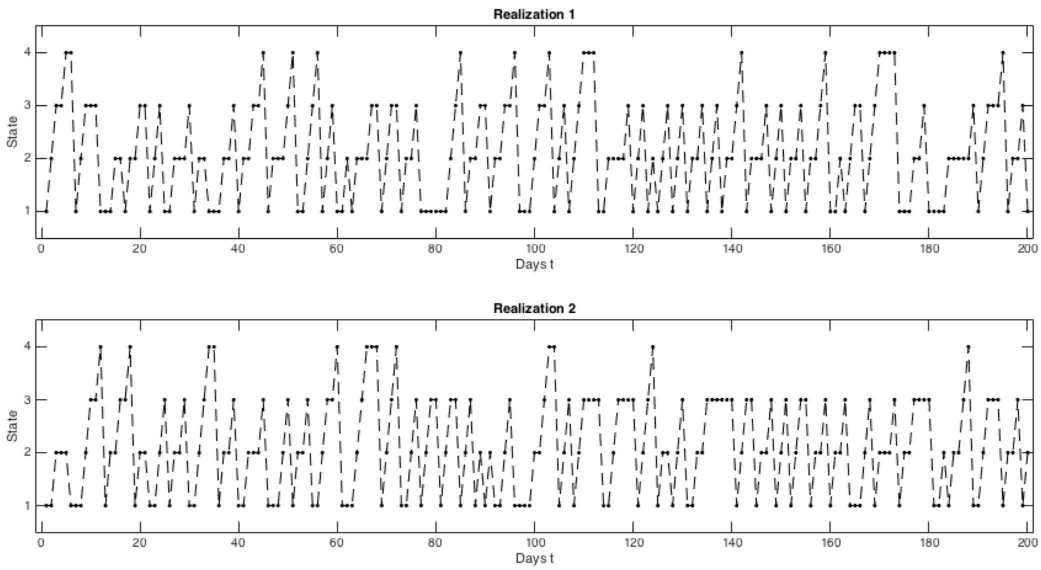
Finn lang-tids fordelinga for dei ulike risikoklassane.

Kva er sannsynet for at risikoen var veldig stor i går (tid $t - 1$) dersom han er liten i dag (tid t)?

c)

Rekn ut lang-tids andelen av tid som risikoen aukar direkte gjennom alle klassane, dvs $X_t = 1$, $X_{t+1} = 2$, $X_{t+2} = 3$, $X_{t+3} = 4$.

Figur 1 syner realisasjonar av risikoprosessen for to vintere. Sammenlikn dei realiserte andelane av direkte aukande risiko med det teoretiske resultatet.



Figur 1: To realisasjonar av prosessen for risiko for snøskred.

d)

Anta $X_0 = 1$. Rekn ut forventa tid til risikoen fyrste gong er i klasse 4.

e)

På ein spesiell stad, langs ei jernbanelinje, kan ein måle risiko med ein automatisk sensor. Målinga, Y_t, gjev ikkje perfekt informasjon om risikoklassen X_t. Den er kontinuerleg fordelt, og avheng kun av risiko på tida då målinga vert gjort. Gjeve at risikoen $X_t = k$, så er målinga Gaussisk fordelt, $\mathrm{N}(k, 1)$; sannsyntettleiken er

$$p(y_t|X_t = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_t - k)^2}{2}\right).$$

Målinga er $Y_t = 3.2$, kva er sannsynet for at risikoen er $X_t = 4$?

Målinga er $Y_t = 3.2$, kva er sannsynet for at risikoen ved tid $t + 1$ er veldig stor?

Oppgåve 2

Ankomstar til eit parkeringshus kan beskrivast ved ein Poissonprosess med rate $\lambda = 0.5$ (tid t er i minutt).

a)

Parkeringshuset opnar kl 8:00. Kva er sannsynet for at ingen kundar har komme kl 8:05?

Kva er forventa antal kundar som har komme dei fyrste 15 minutta?

Gjeve at to kundar kom dei fyrste 10 minutta, kva er sannsynet for at ingen kom dei fyrste 5 minutta?

b)

Kundane sine parkeringstider er uavhengige. Forventa betaling for ein vilkårleg kunde er 100 kr, med standardavvik 10 kr.

Rekn ut forventa inntekt til parkeringshuset i løpet av dagen (08:00-16:00).

Rekn ut variansen til inntekten i løpet av dagen (08:00-16:00).

I eit mer realistisk tilfelle vil kundar også forlate parkeringshuset. Vi antek at kundane kjem uavhengige til parkeringshuset, beskreve ved Poissonprosessen over. Vidare antek vi at kundar sine oppholdstider i parkeringshuset er uavhengige og eksponensialfordelte med forventning $1/\mu$. Set her $\mu = 1/30 = 0.0333$. Antal kundar $N(t)$ i parkeringshuset ved tid t kan da beskrivast ved ein fødsels-og-døds prosess. Maksimal kapasitet for parkeringshuset er $N_{\text{max}} = 20$. Dersom det er 20 kundar i parkeringshuset, så vil ankomne kundar køyre forbi, utan å forme ein kø.

c)

Finn fødsels- og dødsratene i denne prosessen.

Teikn eit overgangsdiagram for prosessen (transition diagram).

Parkeringshuset stengjer. Dei mottek ikkje fleire kundar, men dei som er der ved stengjetid forlet huset med ratar som beskreve over. Det er to kundar i parkeringshuset ved stengjetid. Finn sannsyntettleiken til ventetida til parkeringshuset er tomt.

d)

Bruk lik lang-tids prosessrate inn og ut av tilstandar til å finne eit uttrykk for lang-tids sannsyn for prosessen. Rekn ut $P_{20} = \lim_{t\to\infty} P(N(t) = 20)$.

Rekn ut forventa lang-tids antal kundar i parkeringshuset; $E(N)$.

(Hint: Du kan slå opp sannsyn i Poissonfordelinga i tabell. Hvis X er Poissonfordelt med parameter ν så er $P(X = i) = e^{-\nu}\frac{\nu^i}{i!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.)

e)

Miljøhensyn gjer at myndigheitane doblar avgifta for parkering per minutt. Eigaren av parkeringshuset trur dette vil gje lågare ankomstrate av kundar. Vi antek at kundane i gjennomsnitt bruker samme tid i parkeringshuset som beskreve over. Vi antek vidare at kapasiteten i parkeringshuset aldri vert nådd i dette tilfellet.

Rekn ut ny ankomstrate som gjer at forventa lang-tids inntekt vert den same som før. (Bruk ei forventning $E(N)$ som løysing på oppgåve 2d.)

Formulas for TMA4265 Stochastic Processes:

The law of total probability

Let $B_1, B_2, \ldots$ be pairwise disjoint events with $P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = 1$. Then

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i \cap C)P(B_i|C),$$

$$E[X|C] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|B_i \cap C]P(B_i|C).$$

Discrete time Markov chains

Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}.$$

For an irreducible and ergodic Markov chain, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ exist and is given by the equations

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad \text{and} \quad \sum_i \pi_i = 1.$$

For transient states i, j and k, the expected time spent in state j given start in state i, s_{ij}, is

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} s_{kj}.$$

For transient states i and j, the probability of ever returning to state j given start in state i, f_{ij}, is

$$f_{ij} = (s_{ij} - \delta_{ij})/s_{jj}.$$

The Poisson process

The waiting time to the n-th event (the n-th arrival time), S_n, has the probability density

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

Given that the number of events $N(t) = n$, the arrival times $S_1, S_2, \ldots, S_n$ have the joint probability density

$$f_{S_1,S_2,\ldots,S_n|N(t)}(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{for} \quad 0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t.$$

Markov processes in continuous time

A (homogeneous) Markov process $X(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, with state space $\Omega \subseteq \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, is called a birth and death process if

$$P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$$

$$P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$$

$$P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$$

$$P_{ij}(h) = o(h) \quad \text{for } |j-i| \geq 2$$

where $P_{ij}(s) = P(X(t+s) = j | X(t) = i)$, $i, j \in \mathbf{Z}^+$, $\lambda_i \geq 0$ are birth rates, $\mu_i \geq 0$ are death rates.

The Chapman-Kolmogorov equations

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

Limit relations

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i \,, \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij} \,, \; i \neq j$$

Kolmogorov's forward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Kolmogorov's backward equations

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t).$$

If $P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ exist, P_j are given by

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \quad \text{and} \quad \sum_j P_j = 1.$$

In particular, for birth and death processes

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} \quad \text{and} \quad P_k = \theta_k P_0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

where

$$\theta_0 = 1 \quad \text{and} \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Queueing theory

For the average number of customers in the system L, in the queue L_Q; the average amount of time a customer spends in the system W, in the queue W_Q; the service time S; the average remaining time (or work) in the system V, and the arrival rate λ_a, the following relations obtain

$$L = \lambda_a W.$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q.$$

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \lambda_a E[S^2]/2.$$

Some mathematical series

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad .$$