Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
NN

EKSAMEN I FAG TMA4275 LEVETIDSANALYSE

Xxxdag xx. juni 2008

Tid: 09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler:
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler. Godkjent kalkulator.

Sensur: xx. juni 2008.

BOKMÅL

Oppgave 1

Tabellen¨nedenfor gir bruddstyrke (Y i mg) for 21 wire-forbindelser. Det er to typer feil (M):

M=1: brudd i selve wiren.
M=2: brudd i wire-festet.

Wire	Y	M
1	550	2
2	750	1
3	950	2
4	950	1
5	1150	2
6	1150	2
7	1150	1
8	1150	1
9	1150	1
10	1250	2
11	1250	2
12	1350	1
13	1450	2

14	1450	2
15	1450	1
16	1550	2
17	1550	1
18	1550	1
19	1850	1
20	2050	2
21	3150	2

Som modell antas at det for hver wire-forbindelse er en potensiell bruddstyrke T for brudd i selve wiren og en bruddstyrke S for brudd i festet. I hele oppgaven antas at T og S er uavhengige stokastiske variabler, med pålitelighetsfunksjoner henholdsvis $R_T(t) = P(T > t)$ og $R_S(t) = P(S > t)$ for alle $t \geq 0$.

Den observerte bruddstyrke Y for en wire er nå gitt ved

$$Y = \min(T, S),$$

mens feiltypen er gitt ved den tilhørende M.

De 21 observasjonene antas uavhengige.

Vi er primært interessert i å estimere fordelingen til bruddstyrken T ved brudd i selve wiren.

a) Forklar hvorfor $R_T(t)$ under de gitte forutsetningene kan estimeres ved hjelp av Kaplan-Meier estimatoren (KM-estimatoren).

Hvilken type sensurering har vi i denne situasjonen, og hvilken verdi av M vil svare til sensurering av T?

b) Gjennomfør estimeringen av $R_T(t)$. Tegn Kaplan-Meier plottet.

Bruk plottet til å estimere nedre kvartil og median i fordelingen til T.

Hvorfor kan ikke KM-estimatoren brukes til å estimere øvre kvartil i fordelingen til T?

c) Man ønsker å finne ut om en eksponensialfordeling vil passe som fordeling for T.

Forklar hvordan et plott av den (estimerte) kumulative hasardfunksjonen $Z_T(t)$ vil kunne brukes til å gi en ide om brukbarheten av en eksponensialfordeling for T.

Ved hjelp av en sammenheng mellom pålitelighetsfunksjonen $R_T(t)$ og den kumulative hasardfunksjonen $Z_T(t)$ skal du bruke KM-estimatet fra punkt (b) til å plotte et estimat for $Z_T(t)$.

Tyder plottet på at T er eksponensialfordelt?

Man bestemmer seg isteden for å tilpasse en lognornal fordeling for T. Det følgende er en del av en utskrift fra MINITAB.

```
Distribution Analysis: T

Estimation Method: Maximum Likelihood

Distribution:   Lognormal


Parameter Estimates

                      Standard    95,0% Normal CI
Parameter  Estimate      Error      Lower     Upper
Location    7,41163   0,114869    7,18650   7,63677
Scale      0,413893  0,0951003   0,263819  0,649335
```

d) Uttrykk tetthet og pålitelighetsfunksjon for lognormal fordeling ved tettheten ϕ og kumulativ fordelingsfunksjon Φ i standard normalfordelingen. (Du kan bruke at T er lognormal med lokasjon μ og skala σ hvis $\ln T \sim N(\mu, \sigma^2)$).

Bruk dette til å sette opp et uttrykk for likelihood-funksjonen som er maksimert i MINITAB-analysen. Begrunn kort.

e) Bruk MINITAB-utskriften til å beregne estimater for:

(i) Medianen i fordelingen til T.

(ii) Forventningen i fordelingen til T.

(iii) Øvre og nedre kvartil i fordelingen til T.

(iv) Et 95% konfidensintervall for medianen til T.

Sammenlign (i) og (iii) med resultatene i punkt (b). Hvorfor er det nå mulig å estimere øvre kvartil i fordelingen til T?

Anta i det følgende at både S og T er lognormalt fordelte. En tilpasning av en lognormal fordeling til fordelingen for S ga følgende resultat ved bruk av MINITAB):

```
Parameter  Estimate
Location    7,39094
Scale      0,432850
```

f) Beregn et estimat for sannsynligheten $P(S > T)$.

Hva uttrykker (med ord) denne sannsynligheten?

Kan denne sannsynligheten estimeres fra dataene dersom det ikke gjøres antagelser om fordelingene til S og T? I så fall, hvilket estimat kommer du fram til?

Oppgave 2

Betrakt en type pumper der tiden til feil for en ny pumpe (T i måneder), har pålitelighetsfunksjon

$$R(t) = e^{-t}(t^2 + 2t + 2)/2, \quad \text{for } t > 0$$

a) Vis at den kumulative hasardraten for T er gitt ved

$$Z(t) = t - \ln(t^2 + 2t + 2) + \ln 2, \quad \text{for } t > 0$$

der ln er den naturlige logaritme.

Bruk dette til å finne hasardraten for T.

Vis at MTTF for pumpen, dvs. $E(T)$, er 3 (måneder).

(Du kan her bruke at for alle heltall $k \geq 0$ er $\int_0^\infty t^k e^{-t} dt = k!$).

Pumpen repareres når den feiler og settes deretter i drift igjen umiddelbart (reparasjonstidene antas altså å være 0).

La $N(t)$ være antall feil for pumpen i tidsrommet $(0, t]$, definert for alle $t > 0$.

b) Anta i dette punktet at pumpen etter hver reparasjon er så god som ny.

Hva slags prosess er $N(t)$ i dette tilfellet?

Hva er (tilnærmet) forventet antall feil i løpet av de to første årene?

(Du kan her bruke et resultat som gjelder når tiden går mot uendelig).

Anta i resten av oppgaven at det utføres bare minimal reparasjon ved hver feil.

c) Forklar kort hva som menes med minimal reparasjon, og forklar hvorfor vi da får en Poisson-prosess med ROCOF gitt ved

$$w(t) = \frac{t^2}{t^2 + 2t + 2}, \quad \text{for } t > 0$$

Sett opp den kumulative ROCOF $W(t)$.

Finn forventet antall feil for komponenten i løpet av de to første årene.

Sammenlign med svaret i punkt (b) og kommenter.

d) Hva er sannsynligheten for at pumpen fungerer feilfritt de første 6 månedene?

Gitt at første feil for pumpen inntreffer etter nøyaktig 6 måneder, hva er da sannsynligheten for at den ikke feiler i løpet av de neste 6 månedene?