Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Jo Eidsvik 901 27 472

EKSAMEN I FAG SIF5075 LEVETIDSANALYSE

Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler:
Tabeller og formler i statistikk (TAPIR).
Statistiske tabeller og formler (TAPIR).
Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
Et gult ark (A4 med stempel fra instituttet) med egne formler og notater.

Sensur: 3 uker fra eksamensdato

Oppgave 1

For en komponent av en bestemt type har man registrert følgende levetider (i dager):

27, 54, 87*, 90, 114, 127, 198*

Observasjonene nr. 3 og 7 (merket med stjerne) er sensurerte.

a) Finn og skisser Nelsons estimator for kumulativ sviktintensitet.

Gir plottet noen indikasjon på voksende/avtagende sviktintensitet?

b) Anta nå at levetiden for komponenten er eksponensialfordelt med sviktintensitet λ.

Sett opp rimelighetsfunksjonen (likelihoodfunksjonen) for λ basert på de observerte dataene. Gjør rede for de antagelser du gjør.

På hvilken måte bidrar de sensurerte levetidene til rimelighetsfunksjonen?

c) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ og beregn estimatet du får med de gitte dataene.

Hvordan vil du estimere sannsynligheten for at en komponent av denne typen overlever 200 dager?

d) Man er usikker på om eksponensialfordelingen gir en tilfredsstillende tilpasning for disse dataene. Man betrakter derfor en Weibull-modell med parametre α og λ og tetthet

$$\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, \quad t > 0$$

som en alternativ modell. Når man setter SME for α og λ inn i log-likelihoodfunksjonen for Weibull-modellen (dvs. ln til rimelighetsfunksjonen), får man verdien -28.90.

Formuler hypoteser og gjennomfør en test for å undersøke om eksponensialmodellen bør forkastes som modell for dataene. Hva blir konklusjonen?

Oppgave 2

Betrakt en komponenttype der levetiden T for en ny komponent har tetthet

$$f(t) = te^{-t}, \quad t > 0$$

a) Vis at sviktintensiteten for komponenten er gitt ved

$$z(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

Finn også overlevelsesfunksjonen $R(t)$ og vis at MTTF for komponenten er 2.

Komponenten repareres når den feiler og settes deretter i drift igjen. Anta at reparasjonstidene er neglisjerbare og derfor settes til 0. La $N(t)$ være antall feil for komponenten i tidsrommet $(0, t]$, definert for alle $t > 0$.

b) Anta i dette punktet at komponenten etter hver reparasjon er så god som ny.

Hva slags prosess er $N(t)$ i dette tilfellet?

Hva er (tilnærmet) forventet antall feil i løpet av de 20 første tidsenheter? (Du kan her bruke et resultat som gjelder når tiden går mot uendelig).

c) Anta nå at det utføres bare en minimal reparasjon ved feil.

Forklar kort hva dette betyr og forklar hvorfor vi da får en Poisson-prosess med ROCOF gitt ved

$$w(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

Finn forventet antall feil for komponenten i løpet av de 20 første tidsenheter også under denne antagelsen.

Oppgave 3

En bestemt type ventiler er observert på ulike installasjoner i et oljefelt. La X være totalt antall svikt for denne ventiltypen i løpet av en samlet operasjonstid t. Det antas at X er Poisson-fordelt med parameter λt.

Parameteren λ skal estimeres ved hjelp av Bayes-metoden. Man oppfatter da λ som en realisasjon av en stokastisk variabel Λ. Som apriorifordeling for Λ brukes en gamma-fordeling med parametre $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og tetthet

$$\frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Du kan bruke at denne fordelingen har forventning α/β.

a) Hvilken fortolkning har parameteren λ for denne ventiltypen?

Hva blir aposteriorifordelingen for Λ når X er observert?

b) Finn Bayes-estimatoren for λ (basert på kvadratisk tapsfunksjon).

Forklar hvordan man i praksis kan bruke forhåndsinformasjon om ventilen til å velge verdier for α og β i apriorifordelingen.

Anta at man ender opp med å velge $\alpha = 4$, $\beta = 20$. Kan du gi dette valget en praktisk fortolkning?

c) Beregn Bayes-estimatet når $X = 11$, $t = 56$ år og apriorifordelingen har parametre som angitt til slutt i forrige punkt.

Sammenlign med den vanlige SME for λ.

Finn også et 90% "troverdighetsintervall" (credibility interval) for λ. Bruk at for gitt $X = x$ vil

$$Z = 2(\beta + t)\Lambda$$

være tilnærmet kjikvadratfordelt med $2(\alpha + x)$ frihetsgrader.