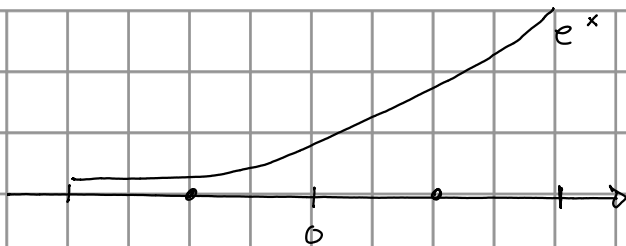


Oppgave 1.

$$I = \int_{-1}^1 e^x dx$$



$$m = 2, \quad h = \frac{2}{2m} = 0.5$$

$$S = \frac{0.5}{3} [e^{-1} + 4e^{-0.5} + 2e^0 + 4e^{0.5} + e^1] = \underline{2.351195}$$

$$\text{Feilgrense: } E = -\frac{1}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) (b-a) \quad \xi \in [-1, 1]$$

$$\text{med } h = 0.5, \quad b = 1, \quad a = -1, \quad f^{(4)}(\xi) = e^\xi, \quad \text{så } |f^{(4)}(\xi)| < e$$

$$|E_{2m}| \leq \frac{1}{180} \cdot 0.5^4 \cdot e \cdot 2 = \underline{1.89 \cdot 10^{-3}}$$

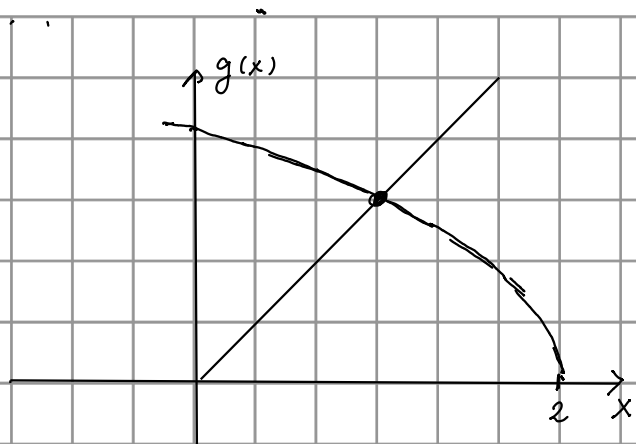
$$(I - S = E_{2m} = -7.92 \cdot 10^{-4}).$$

Oppgave 2

$$x_{k+1} = g(x_k) = \sqrt{2 - x_k}$$

$x^* = 1$ er et fikspunkt siden

$$g(1) = \sqrt{2 - 1} = 1.$$



Vi vet at skjemaet

mot et fikspunkt x^* i $[a,b]$ hvis

- $|g'(x)| \leq L < 1$ på $[a,b]$.
- $g([a,b]) \subset [a,b]$

så

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \Rightarrow |g'(x)| < 1 \text{ for } x < \frac{7}{4} = 1.75$$

Funksjonen $g(x)$ er monotont avtagende, og positiv

Et rimelig valg av intervall (a,b) er dermed

$b = 7/4$, og a velges slik at $g(a) = 7/4$, dvs. $a = -17/16 = -1.0625$

Viser da at iterasjonsskjemaet konvergerer mot $x^* = 1$

for alle startverdier $x_0 \in (-17/16, 7/4)$.

(Dette kan utvides til $x_0 \in (-2, 2)$, ved å observere

at $g([-2, 2]) = [0, 2]$ og $g([0, 2]) = [0, \sqrt{2}] \subset (-17/16, 7/4)$.)

Oppgave 3: a)

Vi har følgende tabell:

x_i	0	$1/2$	1
$f(x_i)$	0	$3/2$	1

Interpolasjonspolynomet blir:

$$p(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{1/2 \cdot (-1/2)} + 1 \cdot \frac{x(x-1/2)}{1 \cdot 1/2} = -4x^2 + 5x.$$

$$\text{Feil: } e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} \underbrace{x \cdot (x - 1/2) \cdot (x - 1)}_{w(x)}$$

$$f^{(3)}(x) = -\pi^3 \cos(\pi x) \Rightarrow |f^{(3)}(x)| \leq \pi^3$$

$$w(x) = x(x - 1/2) \cdot (x - 1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Som har sine ekstremalpunkter i $1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, og

$$|w(1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{6})| = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

Så en øvre grense for feilen er:

$$|e(x)| \leq \frac{\pi^3}{3!} \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216} = 0.2486$$

Oppgave 3b)

Chebyshev-noder på $[-1, 1]$:

$$\bar{x}_0^c = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3}/2$$

$$\bar{x}_1^c = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\bar{x}_2^c = \cos\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = -\sqrt{3}/2$$

Overført til intervallet $[0, 1]$ blir nodene

$$x_0^c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad x_1^c = \frac{1}{2}, \quad x_2^c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fordeleler: Fyll ut.

Oppg. 4.

$$a) \quad y_1^E = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot 0 = \underline{1.0}$$

$$y_1^{FE} : \quad k_1 = 0.1^2 = 0$$
$$k_2 = 0.1 \cdot (1 + 0.1 \cdot 0)^2 = 0.1$$
$$y_1^{FE} = 1 + 0.05(0 + 0.1) = \underline{1.005}$$

b) Vi har

$$d_1^E = y(h) - y_1^E = C_1 h^2 + \mathcal{O}(h^3), \quad C_1 \text{ const.}$$
$$d_1^{FE} = y(h) - y_1^{FE} = \mathcal{O}(h^3)$$

Anta at leddet $C_1 h^2$ dominerer feilene. I så fall

$$d_1^E \approx y_1^{FE} - y_1^E = 5 \cdot 10^{-3}$$

Feilen er større enn toleransen 10^{-3} , så steget aksepteres ikke, og må gjøres på nytt med mindre h .

$$\text{Vi har: } |le_1^E| = |y_1^{FE} - y_1^E| \approx C \cdot h^2$$

$$\text{Vi ønsker: } |le_1^E| \approx C \cdot h_{ny}^2$$

$$\Rightarrow h_{ny} \approx \sqrt{\frac{Tol}{|le_1^E|}} \cdot h$$

Introduer pessimistfaktoren $p = 0.8$

$$h_{ny} = 0.8 \cdot \sqrt{\frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}}} \cdot 0.1 = 0.0358$$

Oppgave 5:

$$\kappa_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max \{4, 12, 10\} = 12$$

Så kondisjonstallet er $12 \cdot 14 = 168$

Vi vet fra forelesningene at

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \kappa_{\infty}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

og

$$\|b - \tilde{b}\|_{\infty} = \max \{0.1, 0.05, 0.05\} = 0.1, \quad \|b\|_{\infty} = 4$$

$$\text{så } \frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq 168 \cdot \frac{0.1}{4} = 4.2.$$

(Hvis man regner ut x og $\tilde{x}$, viser det seg at

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = 0.55, \quad \text{så grensen er heller pessimistisk).}$$

Oppgave 6: Se notat om polynominterpolasjon.