NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: Anne Kværnø

Tlf: 92663824

Eksamensdato: 21. mai 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator. Formelark (vedlagt i Inspera).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer punktene

x_i	0	1	2
y_i	2	-1	2

.

Oppgave 2

a) Gitt integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x.$$

Bruk midtpunktregelen til å finne tilnærmelser til integralet ved bruk av henholdsvis et og to delintervaller ($n = 1$ og $n = 2$).

b) Anta at feilen i midtpunktformelen oppfyller

$$E_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - Q_n \approx C \cdot h^2$$

der Q_n er midtpunkttilnærmelsen med n delintervaller og $h = (b-a)/n$.

Forklar hvordan du kan bruke dette sammen med resultatene fra punkt **a)** til å finne et *estimat* for feilen i de to tilnærmelsene fra punkt **a)**.

Regn ut de to feilestimatene, og sammenlign dem med den virkelige feilen.

Oppgave 3

a) Skriv om den 2.ordens differensialligningen

$$u'' = -u^2 + u'u, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0$$

til et system av 1.ordens differensialligninger.

b) Gitt den implisitte Runge–Kutta metoden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n + \frac{1}{4}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{4}h\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + \frac{3}{4}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1 + \frac{1}{4}h\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

Skriv opp de ikkelineære ligningene som må løses for hvert steg når denne metoden anvendes på systemet av ligninger fra punkt **a)**.

c) Anvend metoden fra **b)** på det lineære, skalare testproblemet

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = y_0,$$

hvor $\lambda \in \mathbb{R}$ er en konstant.

I dette tilfellet kan metoden skrives som

$$y_{n+1} = R(z) y_n, \qquad z = h\lambda,$$

der $R(z)$ er en rasjonal funksjon.

Finn $R(z)$, og vis at $|R(z)| < 1$ for $z < 0$. Forklar hvorfor det er en ønskelig egenskap ved metoden, spesielt hvis den skal brukes for å løse stive ordinære differensialligninger.

Oppgave 4 Gitt det lineære ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Utfør et Gauss elminasjonssteg med skalert radvis pivotering, dvs. skriv om ligningssystemet til formen

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

hvor altså rekkefølgen på ligningene er byttet om i henhold til pivoterings-strategien.

NB! Hvis du ikke husker hvordan man utfører skalert delvis pivotering, bruk vanlig pivotering, eller ingen. Men du vil da ikke få full score på denne deloppgaven.

Oppgave 5 Anta at du har en skalar ikke-lineær ligning på fikspunktform $x = g(x)$, og du ønsker å beregne en tilnærmelse til et fikspunkt r av denne ved hjelp av fikspunktiterasjoner $x_{k+1} = g(x_k)$. Følgende teorem er kjent fra kurset:

Teorem 1. *Hvis det fins et interval* $[a, b]$ *slik at* $g \in C^1[a, b]$, $g([a, b]) \subset (a, b)$ *og det fins en positiv konstant* $L < 1$ *slik at* $|g'(x)| \leq L < 1$ *for alle* $x \in [a, b]$ *så gjelder*

- g *har et unikt fikspunkt* r *i* (a, b).
- *Fikspunktiterasjonene* $x_{k+1} = g(x_k)$ *konvergerer mot* r *for alle startverdier* $x_0 \in [a, b]$.

Bevis teoremet.
Forklar hvordan du går fram, hvilke betingelser du bruker, og hvordan du bruker dem.