

1)

$$p(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + (-1) \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$= x^2 - 3x + 2 + x^2 - 2x + x^2 - x = 3x^2 - 6x + 2$$

Sjekk: $p(0) = 2$, $p(1) = -1$, $p(2) = 2$

2a) $n = 1$: $Q_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \sqrt{2} = 1.107.$

$n = 2$: $Q_2 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 1.0261$

b) $\bar{E}_1 = I - Q_1 \approx C \cdot (b-a)^2$
 $\bar{E}_2 = I - Q_2 \approx C \cdot \frac{1}{4}(b-a)^2$

$$3I - 4Q_2 + Q_1 \approx 0 \Rightarrow I \approx \frac{1}{3}(4Q_2 - Q_1) = \tilde{I} \quad (\text{bedre tiln.})$$

Feilestimer: $\varepsilon_1 = \tilde{I} - Q_1 = \frac{4}{3}(Q_2 - Q_1)$

$$\varepsilon_2 = \tilde{I} - Q_2 = \frac{1}{3}(Q_2 - Q_1)$$

Så, i vårt tilfelle $\left(\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1\right)$ har vi

Feil

Estimat

$$E_1 = -0.1107$$

$$-0.1127$$

$$E_2 = -0.02617$$

$$-0.02818$$

3)

$$a) \quad u = y_1, \quad u' = y_2 \Rightarrow \begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= u_0 \\ y_2' &= -y_1^2 + y_2 \cdot y_1, & y_2(0) &= u_0' \\ &= y_1 \cdot (-y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$b) \quad \text{La } k_1 = [k_{11}, k_{21}]^T \text{ og } k_2 = [k_{12}, k_{22}]^T.$$

Da blir implementasjonene:

$$k_{11} = y_{2n} + \frac{h}{4} k_{21}$$

$$k_{21} = (y_{1n} + \frac{h}{4} k_{11}) \cdot (-y_{1n} - \frac{h}{4} k_{11} + y_{2n} + \frac{h}{4} k_{21})$$

$$k_{12} = y_{2n} + \frac{h}{2} k_{21} + \frac{h}{4} k_{22}$$

$$k_{22} = (y_{1n} + \frac{h}{2} k_{11} + \frac{h}{4} k_{12}) \cdot (-y_{1n} - \frac{h}{2} k_{11} - \frac{h}{4} k_{12} + y_{2n} + \frac{h}{2} k_{21} + \frac{h}{4} k_{22})$$

$$y_{1,n+1} = y_{1n} + \frac{h}{2} (k_{11} + k_{12})$$

$$y_{2,n+1} = y_{2n} + \frac{h}{2} (k_{21} + k_{22})$$

NB! De to første ligningene kan løses uavhengig av de to neste.

$$c) \quad y' = \lambda y: \quad z = \lambda \cdot h$$

$$k_1 = \lambda (y_n + \frac{h}{4} k_1) \Rightarrow k_1 = \frac{1}{1 - z/4} \lambda y_n$$

$$k_2 = \lambda (y_n + \frac{h}{2} k_1 + \frac{h}{4} k_2) \Rightarrow k_2 = \frac{1}{1 - z/4} \lambda (1 + \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{1 - z/4}) \cdot y_n$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{1 + z/4}{(1 - z/4)^2} \lambda \cdot y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) = \frac{(1 + z/4)^2}{(1 - z/4)^2} \cdot y_n \Rightarrow R(z) = \left(\frac{1 - z/4}{1 + z/4} \right)^2.$$

Så, for alle $z < 0$ vil $|R(z)| < 1$.

• Forklar hvorfor det er viktig for stive diff. lign.

4) Skaleringssvektor: $s = \{8, 10, 2\}$.

Velg p s.a. $|a_{p1}| = \max_i |a_{i1}|/s_i = \max \{4/8, 5/10, 2/2\}$
dvs. vi velger $p=3$ som pivotrad.

Bytt rad 3 og 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & -8 & 2 & -2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} m_{2,1} = 5/2 \\ m_{3,1} = 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 5/2 & -25/2 \\ 0 & -12 & 0 & -12 \end{array} \right]$$

Sjekk:

(løsning: $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{2}{15} \left(-\frac{25}{2} + 5 \right) = -1$, $x_1 = \frac{1}{2} (5 - 2 \cdot 1 + 1) = 2$)

5) Vi har: $r = g(r)$
 $x_{k+1} = g(x_k)$

Def. av. et fikspunkt.

Skjema:

Eksistens av et fikspunkt:

La $f(x) = x - g(x)$. Siden $g \in C[a, b]$ så ligger $f \in C[a, b]$.
 Siden $g([a, b]) \subset (a, b)$ så må $f(a) \cdot f(b) < 0$ (forskjellig fortegn.) I følge skjæringssetningen fins det da en r s.a. $f(r) = r - g(r) = 0$, $r \in (a, b)$.

Entydighet:

Siden $|g'(x)| \leq L < 1$, så er $f'(x) = 1 - g'(x) > 0$, dvs. f er monotont økende, og det kan bare ha en rot i (a, b) .

Konvergens:

Først: $g([a, b]) \subset (a, b) \Rightarrow$ hvis $x_0 \in [a, b]$ så vil $x_k \in (a, b)$ for alle k .

$$e_{k+1} = r - x_{k+1} = g(r) - g(x_k) = g'(\xi_k)(r - x_k) = g'(\xi_k)e_k.$$

ξ_k mellom x_k og r (og dermed i (a, b)).

Her har vi brukt middelverditcoremet, som krever $g \in C^1(a, b)$.

$$|e_{k+1}| = |g'(\xi_k)| \cdot |e_k| \leq L |e_k| = L^{k+1} \cdot |e_0|. \quad (|g'| \leq L)$$

$$\text{Siden } L < 1 \Rightarrow L^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |e_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} r.$$