Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Ivar Amdal	tlf. 73 59 34 68
Eivind Coward	tlf. 73 59 16 93
Trond Digernes	tlf. 73 59 35 17
Bjørn Dundas	tlf. 73 55 02 42
Lisa Lorentzen	tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I FAG SIF5003/5004 MATEMATIKK 1/1A

Onsdag 10. desember 1997
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator, med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Oppgave 1 Løs følgende initialverdiproblem for $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$y' \cos x + y \sin x = 1, \qquad y(0) = 1.$$

Oppgave 2 I Postens informasjon for A-post innenlands finner vi at maksimumsmålene for sendinger i form av en rull er "Lengde + dobbelt tverrmål = 104 cm, lengde høyst 90 cm". Med rull forstås en sylinder med sirkulært tverrsnitt, og tverrmålet er diameteren. Vi ønsker å sende en rull med størst mulig volum. Hva blir lengden og hva blir tverrmålet?

Oppgave 3

a) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ delintervaller til å finne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^{\pi/3} e^{\sin\theta}\, d\theta.$$

b) La $f(\theta) = e^{\sin\theta}$ være integranden i **a)**. Vis at $|f''(\theta)| < 1.5$ når $0 \le \theta \le \pi/3$, og bruk dette til å vurdere feilen ved tilnærmingen i **a)**. Hvor mange delintervaller ville du bruke i **a)** for å være sikker på at feilen ble mindre enn 10^{-4}?

Oppgave 4 La funksjonen F være definert for $x \ge 1$ ved

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt,$$

og la K være kurven $y = F(x)$ for $1 \le x \le 2$. Finn buelengden av K. Bestem også arealet av rotasjonsflata som fremkommer når K dreies om den rette linje $x = 1$.

Oppgave 5 Frysepunktet T for saltvann er en funksjon av ionekonsentrasjonen x, og teoretiske betraktninger gir at T tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{dT}{dx} = -\frac{aT^2}{1+bx}$$

hvor a og b er positive konstanter. Bruk verdiene $a = 2.49 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$ (K = kelvin, M = molar = enhet for konsentrasjon) og $b = 0.018\ \mathrm{M}^{-1}$ når det spørres etter tallsvar i denne oppgaven.

a) Finn ligningen for tangenten til grafen til T (som funksjon av x) gjennom punktet $(0, T_0)$ ved hjelp av differensialligningen $(*)$. Sett $T_0 = 273.15$ K, og bruk tangentligningen til å finne en tilnærmet verdi for $T(x)$ i Barentshavet hvor $x = 1.2$ M.

b) Løs differensialligningen $(*)$ under initialbetingelsen $T(0) = T_0$ (for vilkårlig a, b og T_0). Sett igjen $T_0 = 273.15$ K og sammenlign den verdien du nå finner for $T(1.2)$ med den tilnærmete verdien du fant i **a)**.

Oppgave 6 Finn ligningen for tangenten til kurven

$$(1) \qquad x^3y + xy^5 = 2$$

i punktet $(1, 1)$. Ligningen (1) definerer implisitt en funksjon $y = f(x)$ i nærheten av $x = 1$ med $f(1) = 1$. Finn Taylorpolynomet av grad 2 for $f(x)$ om $x = 1$.

Oppgave 7 Bestem grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} n(\pi - 2\arctan n),$$

og avgjør om den uendelige rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2\arctan n)$$

er konvergent eller divergent.

Oppgave 8 Bestem konvergensintervallet for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

og finn et endelig uttrykk for summen i konvergensintervallet.