



Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Bokmål

Lørdag 9. desember 2000

Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensuren faller i uke 3.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Funksjonene $f(t)$ og $h(t)$ har Laplacetransformerte

$$F(s) = \frac{2b}{s^2 - b^2} + \frac{b^2}{s^2(s - b)} \quad \text{og} \quad H(s) = F(s)e^{-as}$$

der a og b er konstanter, $a \geq 0$ og $b \neq 0$. Finn $f(t)$ og $h(t)$.

b) Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensialligningen

$$y'' - y = 2\delta(t - 1) + g(t) \quad \text{der} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1 \\ t & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

$\delta(t - 1)$ er Diracs deltafunksjon og initialverdiene er $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Er løsningen deriverbar overalt?

Oppgave 2

a) Finn en (formell) løsning av rand- og initialverdiproblemet

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1\text{-dimensjonal varmeligning})$$

$$(ii) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0,$$

$$(iii) \quad u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 < x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{for } \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

når det oppgis som kjent fra læreboka at alle funksjoner av formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller (i) og (ii) er gitt ved

$$u_n(x, t) = B_n e^{-n^2 c^2 t} \sin nx, \quad B_n \text{ konstant, } n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Finn alle løsninger av (i) på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene

$$(iv) \quad u(0, t) = 0 \quad \text{og} \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

Oppgave 3

a) Funksjonen $u(x, t)$ tilfredsstiller den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{for } t > 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Dessuten er

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0 && \text{for } t > 1 \\ u(x, 1) &= f(x) && \text{for } -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

der $f(x)$ er en gitt funksjon.

Finn en differensialligning som den Fouriertransformerte

$$\widehat{u}(w, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx$$

tilfredsstiller og vis, ved å løse denne, at $\widehat{u}(w, t) = \widehat{f}(w) e^{-w^2 \ln t}$.

b) La A være en konstant, $A > 1$, og sett $g_A(x) = e^{-x^2/(4 \ln A)}$.

Finn den Fouriertransformerte $\widehat{g}_A(w) = \mathcal{F}\{g_A(x)\}$. Bruk tabell.

Vis at $u(x, t)$ (funksjonen i a)) kan skrives på formen

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) h(p, t) dp$$

og skriv opp eksplisitt formen av $h(x, t)$.

Oppgave 4

Vis at

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} (z-i)^n \quad \text{for } |z-i| < 1.$$

Finn de to Laurenttrekkene med senter $z = i$ for funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$$

som gjelder i området $0 < |z-i| < 1$ og i området $1 < |z-i| < \infty$.**Oppgave 5**

- a) Finn de tre røttene z_k , $k = 0, 1, 2$, til ligningen $z^3 + 1 = 0$. Vis at residuet til funksjonen

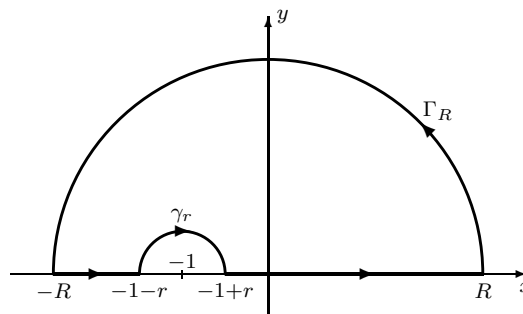
$$f(z) = \frac{e^{\pi iz}}{z^3 + 1} \quad \text{i punktet } z_k \quad \text{er lik} \quad -\frac{1}{3} z_k e^{i\pi z_k}.$$

- b) Konturen $C_{R,r}$ er gitt som på figuren, der Γ_R og γ_r er halvsirkler. Finn verdien av integralet

$$\oint_{C_{R,r}} f(z) dz.$$

Finn også grenseverdien

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$



Svarene skal skrives på normalform.

- c) Vis at

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

og bruk resultatene ovenfor til å finne verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^3 + 1} dx.$$