Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Olav Njåstad tlf. 73 59 35 13

EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Bokmål
Fredag 21. desember 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensuren faller 28. januar.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

a) Finn invers Laplacetransformert for funksjonene

$$F(s) = \frac{9}{s^2(s+3)} \qquad \text{og} \qquad G(s) = \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + 3y'(t) = r(t) \quad \text{for } t > 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = -3$, når $r(t) = 9$ for $0 < t < 2$ og $r(t) = 0$ for $t > 2$.

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt på intervallet $0 < x < 2$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{for } 1 < x < 2. \end{cases}$$

La g være den like (jevne), periodiske utvidelsen av f med periode 4, og la h være den odde, periodiske utvidelsen av f med periode 4.

a) Skisser grafene til g og h på intervallet $-4 < x < 4$, og beregn (Fourier-)cosinusrekka til f.

b) Det oppgis at (Fourier-)sinusrekka til f er

$$(*) \qquad \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}.$$

Bruk $(*)$ til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Hva er summen av rekka $(*)$ for $x = \pi$?

Oppgave 3

a) Funksjonen $u(x,t)$ tilfredsstiller ligningen

$$u_{xx} = u_{tt} - 2u \qquad \text{for } 0 < x < \pi,\ t > 0$$

og randbetingelsene

$$u(0,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0.$$

Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller disse kravene.

b) Finn en rekkeutvikling for en funksjon $u(x,t)$ som tilfredsstiller kravene under a), og dessuten initialbetingelsene

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

Her er $f(x)$ en funksjon med rekkeutvikling $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$.

Oppgave 4

Det oppgis at den Fouriertransformerte av e^{-ax^2} er $\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}$ (a er en positiv konstant).

Bruk Fouriertransformasjonen til å løse integralligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-b(x-p)^2}\,dp = e^{-x^2} \qquad \text{der } b > 1.$$

Oppgave 5

Vis at funksjonen $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2e^x\cos y$ er harmonisk. Finn alle funksjoner $v(x,y)$ som er slik at funksjonen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ er analytisk.

Oppgave 6

a) Finn de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(2z+1)^2}$$

og beregn residuene til funksjonen i disse punktene.

b) Bruk residuregning til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\left(e^{i\theta}+1\right)^2}{\left(2e^{i\theta}+1\right)^2}\, d\theta\,.$$

Oppgave 7

a) Finn Maclaurinrekka (Taylorrekka med senter $z=0$) for funksjonen $f(z)$ og Laurentrekka i området $0<|z|<\infty$ for funksjonen $g(z)$ når $f(z)$ og $g(z)$ er gitt ved

$$f(z) = e^{3iz}-1, \qquad g(z) = \frac{e^{3iz}-1}{z^2}.$$

b) La Γ_R være halvsirkelen $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Vis at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = 0.$$

Finn tilslutt verdien av det reelle integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 3x}{x^2}\, dx$$

ved å ta utgangspunkt i integralet $\oint_C g(z)\, dz$ der konturen C har form som på figuren.