**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Olav Njåstad tlf. 73 59 35 13

# EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Bokmål
Fredag 20. desember 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 29. januar

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.*

**Oppgave 1**
La funksjonen $f(t)$ være definert ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ (t-1)^2 & \text{for } t > 1, \end{cases}$$

og la $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ for $t > 0$.

**a)** Finn de Laplacetransformerte $F(s)$ og $G(s)$ til $f(t)$ og $g(t)$.

**b)** Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensialligningssystemet

$$x_1' + x_2 = f(t)$$
$$x_1 - x_2' = g(t)$$

med startverdiene

$$x_1(0) = 0 \quad \text{og} \quad x_2(0) = 1.$$

**Oppgave 2**
La $f$ være definert på intervallet $0 < x < \pi$ ved formelen $f(x) = 1 - x/\pi$, og la $g$ være den odde og $h$ den like (jevne) $2\pi$-periodiske utvidelsen til $f$.

**a)** Skisser grafene til $g$ og $h$ i intervallet $-3\pi < x < 3\pi$. Finn Fouriersinusrekka til $f$, og beregn summen av rekka for $x = 31\pi/2$.

**b)** La $u(x,t)$ være en funksjon definert i området $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$ som tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c \text{ en positiv konstant})$$

med randbetingelsene

$$(**) \qquad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \text{for } t \ge 0.$$

Bestem alle funksjoner $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller $(*)$ og $(**)$.

Finn, på rekkeform, en funksjon $u(x,t)$ som i tillegg til $(*)$ og $(**)$ tilfredsstiller initialbetingelsen $u(x,0) = 1 - x/\pi$ for $0 < x < \pi$.

**Oppgave 3**
Funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**a)** Vis at de Fouriertransformerte $\left((1/\sqrt{2\pi}\,) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, dx\right)$ av $f(x)$ og $g(x)$ er

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w} \qquad \text{og} \qquad \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - iw}{1 + w^2}.$$

**b)** La $h(x)$ være konvolusjonen $\left(h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) g(p)\, dp\right)$ av $f(x)$ og g$(x)$. Gjør rede for at

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - iw)\sin w}{w(1 + w^2)} e^{iwx}\, dw$$

og bestem verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w(1 + w^2)}\, dw.$$

(Du kan bruke, uten bevis, at $h(x)$ er en kontinuerlig funksjon.)

**Oppgave 4**
Løs ligningen

$$e^z + e^{-z} = 2i$$

med hensyn på $z$. Vis på en figur hvor løsningene ligger i det komplekse planet.

**Oppgave 5**
Gitt funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4}.$$

**a)** Finn de singulære punktene til $f(z)$, og vis at residuet i det eneste singulære punktet som ligger i første kvadrant er $e^{-\pi}(1+i)/16$.

**b)** La $\Gamma_R$ være den delen av sirkelen $|z| = R$ som ligger i første kvadrant. Vis at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Bestem verdien av de reelle integralene

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4}\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \pi x - e^{-\pi x}}{x^4 + 4}\,dx$$

ved å ta utgangspunkt i integralet $\oint_{C_R} f(z)\,dz$ der $C_R$ er den lukkede kurven som består av linjestykket fra 0 til $R$ på $x$-aksen, sirkelbuen $\Gamma_R$ og linjestykket fra $iR$ til 0 på $y$-aksen.

**Oppgave 6**

**a)** Finn Laurentrekka i et størst mulig område av formen $0 < |z| < R$ for funksjonen

$$g(z) = \frac{1}{z^2(3 - 2z)}$$

og angi $R$.

**b)** Finn Laurentrekka med sentrum $z_0 = 0$ for funksjonen

$$h(z) = z^{p-1} e^{1/z^p}$$

der $p$ er et naturlig tall ($p = 1, 2, 3, \ldots$).

Bestem residuene til funksjonen $f(z) = g(z) + h(z)$ i alle de singulære punktene.