Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad tlf. 73 59 35 36

EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Torsdag 2. august 2001
Kl. 9–14

Hjelpemidler – B2:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurfrist: 1. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1

a) Finn den Laplacetransformerte $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og den inverse Laplacetransformerte $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ for funksjonene

$$f(t) = \sin t + t\cos t \qquad \text{og} \qquad G(s) = \frac{s}{s^2+1}\left[1 - e^{-2\pi s}\right].$$

b) Finn $y(t)$ for $t > 0$ ved hjelp av Laplacetransformasjon når

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = r(t), \qquad y(0) = 0, \qquad r(t) = \begin{cases} 2\cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 8y = 2\delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

der $\delta(t - 2\pi)$ er Diracs deltafunksjon.

Oppgave 2
Gitt

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$$

(ii) $$u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

a) Avgjør (ved innsetting) hvilke(n) av følgende funksjoner

$$\begin{array}{lll} u(x,y) = y, & u(x,y) = \sin nx \sinh ny & \\ u(x,y) = xy, & u(x,y) = \cos nx \sinh ny & (n = 1,2,3,\dots) \end{array}$$

som oppfyller (i), (ii) og

(iii) $$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

Finn en funksjon $u(x,y)$ som oppfyller (i), (ii), (iii) og

(iv) $$u(x,\pi) = 1 - \cos 2x\,, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

b) Finn alle funksjoner på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (i), (ii) og

(v) $$u(0,y) = 0, \qquad u_x(\pi,y) = 0 \qquad \text{for } 0 < y < \pi.$$

Oppgave 3
Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \le x \le \pi$ har Fouriersinusrekke

(∗) $$-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Skisser grafen til summen av rekka (∗) for $-2\pi \le x \le 2\pi$. Bruk (∗) til å finne summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Oppgave 4
Bruk Fouriertransformasjon til å finne $f(x)$ når

$$f(x) = e^{-|x|} - 4\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-|x-p|}\,dp.$$

Oppgitt Fouriertransformert: $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+w^2} \qquad (a > 0)$

Oppgave 5
Bestem konstantene a og b slik at funksjonen

$$f(z) = x^2 + ay^2 - y + i(2xy + bx + 2)$$

blir analytisk. Finn, for disse verdiene av a og b, $f(z)$ uttrykt ved $z = x + iy$.

Oppgave 6
Finn alle løsninger av ligningen

$$3\cos z = 4i.$$

Oppgave 7
La C_R være randkurven til sirkelsektoren $|z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \pi/2$, positivt orientert, og la Γ_R være sirkelbuedelen av C_R, slik at Γ_R er gitt ved $|z| = R$, $0 \leq \arg z \leq \pi/2$.

a) Vis at

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } R < \sqrt{2}\,, \\ \pi & \text{hvis } R > \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

b) Gjør rede for at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = 0,$$

og bruk resultatet i **a)** til å finne verdien av integralet

$$\int_0^\infty \frac{y^2 - 2}{y^4 + 4}\, dy.$$