



Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad tlf. 73593513

EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Lørdag 3. august 2002

Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 2. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

La u betegne stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ 1 & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

a) La a og b være konstanter, $b \geq 0$. Finn den Laplacetransformerte til funksjonen

$$f(t) = e^{at}u(t - b).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = e^t u(t - 1) \quad \text{for } t > 0,$$

når initialbetingelsene er $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

c) Finn konvolusjonen $f * f$, der f er gitt under punkt a).

Oppgave 2

Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = x \cos x \quad \text{for } -\pi \leq x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x.$$

La b_n for $n = 1, 2, 3, \dots$ betegne Fouriersinuskoeffisientene til $f(x)$.

Beregn koeffisienten b_1 . (Hint: $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.)

Det oppgis at for $n \neq 1$ er

$$b_n = (-1)^n \frac{2n}{n^2 - 1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Skriv opp Fourierrekka til $f(x)$, og bruk den til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 - 1}.$$

Oppgave 3

I området $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$ er det gitt et randverdiproblem

$$(1) \quad u_{xx} = u_{tt} - u,$$

$$(2) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0.$$

a) Bestem alle funksjoner av typen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstill (1) og (2).

b) Skriv opp en løsning av (1) og (2) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredsstill initialbetingelsene

$$u(x, 0) = 1 + \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Oppgave 4

Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Regn ut den Fouriertransformerte $\hat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iw x} dx$. Finn verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i(x-1)w} - 2e^{i(x-2)w}}{w} dw$$

for en vilkårlig x i det åpne intervallet $(1, 2)$. Bruk resultatet til å finne verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 \sin \frac{1}{2}w + \sin \frac{3}{2}w}{w} dw.$$

Oppgave 5

Funksjonen

$$u(x, y) = 3x^2 + ay^2 + e^{bx} \cos y$$

er gitt, a er et reelt tall og b et positivt tall. Bestem a og b slik at $u(x, y)$ blir harmonisk, og finn alle funksjoner $v(x, y)$ som er slik at funksjonen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ er analytisk.

Oppgave 6

Finn Laurentrekka til funksjonen

$$f(z) = e^{z/(z-i)}$$

i området $0 < |z - i| < \infty$. (Hint: Skriv først $\frac{z}{z-i}$ på formen $A + \frac{B}{z-i}$.)

Bestem verdien av integralet

$$\oint_C f(z) dz$$

når C er sirkelen $|z - i| = 1$, positivt orientert.

Oppgave 7

a) Finn de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2+4z+1)}$$

og regn ut residuet til funksjonen i disse punktene.

b) Bruk residuregning til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta.$$