Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad   tlf. 735 93513

EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Lørdag 3. august 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 2. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1
La u betegne stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ 1 & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

a) La a og b være konstanter, $b \geq 0$. Finn den Laplacetransformerte til funksjonen

$$f(t) = e^{at}u(t-b).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + y = e^t u(t-1) \qquad \text{for } t > 0,$$

når initialbetingelsene er $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

c) Finn konvolusjonen $f * f$, der f er gitt under punkt a).

Oppgave 2
Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = x\cos x \quad \text{for } -\pi \leq x < \pi, \qquad f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{for alle } x.$$

La b_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$ betegne Fouriersinuskoeffisientene til $f(x)$.

Beregn koeffisienten b_1. (Hint: $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.)

Det oppgis at for $n \neq 1$ er

$$b_n = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Skriv opp Fourierrekka til $f(x)$, og bruk den til å finne summen av rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2-1}.$$

Oppgave 3
I området $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ er det gitt et randverdiproblem

(1) $$u_{xx} = u_{tt} - u,$$
(2) $$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

a) Bestem alle funksjoner av typen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (1) og (2).

b) Skriv opp en løsning av (1) og (2) på rekkeform, og bestem den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene

$$u(x,0) = 1 + \cos \pi x, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Oppgave 4
Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Regn ut den Fouriertransformerte $\widehat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$. Finn verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i(x-1)w} - 2e^{i(x-2)w}}{w}\, dw$$

for en vilkårlig x i det åpne intervallet $(1,2)$. Bruk resultatet til å finne verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\sin\frac{1}{2}w + \sin\frac{3}{2}w}{w}\, dw\,.$$

Oppgave 5
Funksjonen
$$u(x,y) = 3x^2 + ay^2 + e^{bx}\cos y$$
er gitt, a er et reelt tall og b et positivt tall. Bestem a og b slik at $u(x,y)$ blir harmonisk, og finn alle funksjoner $v(x,y)$ som er slik at funksjonen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ er analytisk.

Oppgave 6
Finn Laurentrekka til funksjonen
$$f(z) = e^{z/(z-i)}$$
i området $0 < |z-i| < \infty$. (Hint: Skriv først $\dfrac{z}{z-i}$ på formen $A + \dfrac{B}{z-i}$.)

Bestem verdien av integralet
$$\oint_C f(z)\,dz$$
når C er sirkelen $|z-i| = 1$, positivt orientert.

Oppgave 7

a) Finn de singulære punktene til funksjonen
$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2+4z+1)}$$
og regn ut residuet til funksjonen i disse punktene.

b) Bruk residuregning til å finne verdien av integralet
$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta\,.$$