**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

# EKSAMEN I SIF5012 MATEMATIKK 4K

Torsdag 7. august 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 28. august

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.*

**Oppgave 1**

**a)** Vis at den Laplacetransformerte til funksjonen $f(t) = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$ er

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}.$$

Finn den inverse Laplacetransformerte til funksjonen $G(s) = F(s)e^{-s}$.

**b)** Bruk Laplacetransformasjon til å løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + y = r(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

der $r(t)$ er funksjonen gitt ved $r(t) = 0$ for $t < 1$, $r(t) = t - 1$ for $t > 1$.

**Oppgave 2**

Vis at

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)$$

når $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ og $f(t)$ og $f'(t)$ er kontinuerlige og $f''(t)$ er stykkevis kontinuerlig.

La $y(t)$ være en løsning av differensialligningen

$$ty'' + 2y' + ty = 0$$

som oppfyller $y(0) = 1$, og la $Y(s)$ være den Laplacetransformerte av $y(t)$.

Vis at $Y'(s) = -1/(s^2+1)$ og finn $y(t)$.

(Merk at differensialligningen bare har én initialbetingelse, men det nok for å løse oppgaven.)



**Oppgave 3**

**a)** Funksjonen $f(x)$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{for } 0 < x < 1 \text{ og for } 2 < x < \pi. \end{cases}$$

Finn Fouriercosinusrekka til $f(x)$ på intervallet $0 < x < \pi$. Hva er summen av rekka
$x = 1$ og når $x = -\pi/2$?

**b)** Finn alle funksjoner $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

(i) $u_t = u_{xx}$ for $0 \le x \le \pi$, $t > 0$

(ii) $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0$ for $t > 0$.

Bestem, på rekkeform, en funksjon $u(x,t)$ som oppfyller (i), (ii) og

(iii) $u(x,0) = f(x)$ for $0 < x < \pi$

der $f(x)$ er funksjonen definert i **a)**.

**Oppgave 4**

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis at den Fouriertransformerte $(1/\sqrt{2\pi}\,)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx$ til $f(x)$ kan skrives på formen

$$\widehat{f}(w) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w}.$$

Finn også den Fouriertransformerte av konvolusjonen $f * f$. Bruk invers Fouriertransformas
til å bestemme verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5w - 2\cos 3w + \cos w}{w^2}\,dw.$$

(Du kan bruke, uten begrunnelse, at $(f*f)(x)$ er en kontinuerlig funksjon.)

**Oppgave 5**

Vis at funksjonen

$$u(x,y) = e^{x+2}\sin(y+1)$$

er harmonisk. Finn en funksjon $v(x,y)$ slik at funksjonen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ er analyt
og skriv funksjonen $f(z)$ som et uttrykk i $z$.

**Oppgave 6**
La $f(z)$ være funksjonen som oppfyller $f(z)(e^z - 1) = z$ og som har Maclaurinrekke

$$(*) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \qquad (|z| < R).$$

**a)** Finn alle polene til $f(z)$ og regn ut residuet i hver av dem. (Hint: $f(z) = z/(e^z - 1)$.)

**b)** Angi konvergensradien $R$ til Maclaurinrekka $(*)$, og vis at koeffisientene $c_0$, $c_1$, $c_2$, $\ldots$ oppfyller

$$c_0 = 1 \qquad \text{og} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{(n-k)!} = 0 \qquad \text{for } n = 2, 3, 4, \ldots \ .$$

**Oppgave 7**

**a)** Finn alle singularitetene til funksjonen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

og oppgi hvilken type de er av. Vis at residuet til $f(z)$ i punktet $z = i$ er lik $-\frac{1}{2} i e^{-1}$.

**b)** La $\Gamma_R$ være halvsirkelen $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Vis at

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

Bruk residuregning til å finne verdien av det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$