



Oppgavesettet har 12 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5, 6ab, 7ab, som teller likt ved bedømmelsen.

1 a) Vi kan finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ved å bruke integralregelen 2 ganger:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t} &\implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s(s+3)}\right\} = 9 \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = -3(e^{-3t} - 1) \\ &\implies f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s+3)}\right\} = \int_0^t 3(1 - e^{-3\tau}) d\tau = 3t + e^{-3t} - 1\end{aligned}$$

Eller, vi kan bruke delbrøkkoppspalting: $\frac{9}{s^2(s+3)} = \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}$.

For å finne $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, bruker vi skiftteorem 2:

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-2s}\} = f(t-2)u(t-2) \\ &= [3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1]u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 3t + e^{-3(t-2)} - 7 & \text{for } t > 2 \end{cases}\end{aligned}$$

b) Vi regner først ut $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$:

$$r(t) = 9 - 9u(t-2) \Rightarrow R(s) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \quad \text{eller: } R(s) = \int_0^2 9e^{-st} dt = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

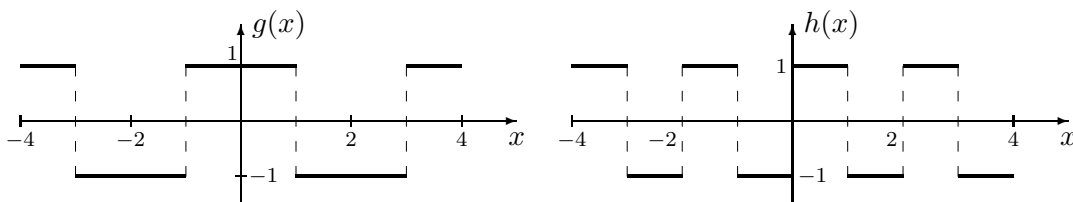
Vi Laplacetransformerer så initialverdiproblemet og bestemmer $Y = \mathcal{L}\{y\}$:

$$s^2Y - s \cdot 1 - (-3) + 3(sY - 1) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \quad s(s+3)Y = s + \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s+3} + \frac{9}{s^2(s+3)} - \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)} = \frac{1}{s+3} + F(s) - G(s)$$

$$\begin{aligned}y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-3t} + f(t) - g(t) \\ &= e^{-3t} + (3t + e^{-3t} - 1) - [3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1]u(t-2) \\ &= \begin{cases} 2e^{-3t} + 3t - 1 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 2e^{-3t} - e^{-3(t-2)} + 6 & \text{for } t > 2 \end{cases}\end{aligned}$$

- 2 a)** Grafen til den jevne, henholdsvis odde, 4-periodiske utvidelsen av f :



Vi søker cosinusrekka $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L)$. Her er $L = 2$ og Eulerformlene for koeffisientene gir

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx + \int_1^2 (-1) dx \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Når n er partall, $n = 2m$, er $\sin n\pi/2 = \sin m\pi = 0$. Når n er oddetall, $n = 2m + 1$, blir $\sin n\pi/2 = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Cosinusrekka blir dermed

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2}.$$

b) Vi setter $x = 1/2$ i sinusrekka til f , og bruker at $\sin(2n+1)\pi/2 = (-1)^n$. Siden f er kontinuerlig for $x = 1/2$, og $f(1/2) = 1$, får vi

$$f(1/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} f(1/2) = \frac{\pi}{4}.$$

Sinusrekka (*) er Fourierrekka til h . Siden h er kontinuerlig for $x = \pi$, er

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi^2}{2n+1} = h(\pi) = -1.$$

- 3 a)** Vi setter inn $u(x, t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - 2FG, \quad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 2 = k \text{ (konstant)}, \quad \begin{aligned} F'' - kF &= 0 \\ G'' - (k+2)G &= 0 \end{aligned}$$

Randbetingelsene medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ og, som i Kreyszig 11.3, får vi løsninger $F(x) \neq 0$ når $k = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Da blir $F_n(x) = \sin nx$. Ligningen for $G(t)$ blir

$$G'' + (n^2 - 2)G = 0 \quad \text{med løsning} \quad \begin{aligned} G_1(t) &= A_1 e^t + B_1 e^{-t} \quad \text{for } n = 1 \\ G_n(t) &= A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad \text{for } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2 - 2}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_1(t)$ kan også skrives $G_1(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$.) For $u(x, t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= F_1(x)G_1(t) = (A_1 e^t + B_1 e^{-t}) \sin x \\ u_n(x, t) &= F_n(x)G_n(t) = (A_n \cos \sqrt{n^2 - 2} t + B_n \sin \sqrt{n^2 - 2} t) \sin nx, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

b) Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u(x, t) = (A_1 e^t + B_1 e^{-t}) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{n^2 - 2} t + B_n \sin \sqrt{n^2 - 2} t) \sin nx$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 1, 2, 3, \dots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt.

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} = u(x, 0) = (A_1 + B_1) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx$$

$$(2) \quad 0 = u_t(x, 0) = (A_1 - B_1) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sqrt{n^2 - 2} \sin nx$$

Av (1) får vi $A_1 + B_1 = 1$ og $A_n = 1/n^4$ for $n \geq 2$. Av (2) får vi $A_1 - B_1 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 2$. Det gir $A_1 = B_1 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x, t) = \cosh t \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos \sqrt{n^2 - 2} t \sin nx.$$

4 Integralligningen kan skrives $f(x) * e^{-bx^2} = e^{-x^2}$. Vi Fouriertransformerer ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte, og finner $\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-w^2/4b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-w^2/4} \\ \hat{f}(w) &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/4 - (-w^2/4b)} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/4\beta} = \frac{\sqrt{b}\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-w^2/4\beta} \end{aligned}$$

der $1/4\beta = 1/4 - 1/4b$, dvs. $\beta = b/(b-1)$. Ved igjen å bruke den oppgitte Fouriertransformerte får vi

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\} = \frac{\sqrt{b}\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\beta x^2} = \frac{b}{\sqrt{\pi(b-1)}} e^{-bx^2/(b-1)}.$$

5 Funksjonen $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2e^x \cos y$ er harmonisk siden $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Ifølge Cauchy–Riemannligningene må u og v oppfylle

$$(1) \quad v_y = u_x = 2x + 2e^x \cos y \quad \text{og} \quad (2) \quad v_x = -u_y = 2y + 2e^x \sin y.$$

Ved å integrere (1) mhp. y og derivere svaret mhp. x , får vi

$$(3) \quad v = 2xy + 2e^x \sin y + h(x) \quad \text{og} \quad (4) \quad v_x = 2y + 2e^x \sin y + h'(x)$$

der $h(x)$ er en vilkårlig funksjon av x . Sammenligner vi (2) og (4) ser vi at $h'(x) = 0$, dvs. $h(x) = C$ (konstant). Dermed får vi $v(x, y) = 2xy + 2e^x \sin y + C$.

- 6 a)** Singulære punkter for $f(z) = (z+1)^2/[z(2z+1)^2]$ er $z_1 = 0$ (en enkel pol) og $z_2 = -1/2$ (pol av orden 2).

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = \left[\frac{(z+1)^2}{(2z+1)^2} \right]_{z=0} = 1$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{d}{dz} \left[(z + \frac{1}{2})^2 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z+1)^2}{4z} \right] = \left[\frac{z^2 - 1}{4z^2} \right]_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}$$

- b)** Vi setter $z = e^{i\theta}$, $dz = e^{i\theta} i d\theta = iz d\theta$. Når θ varierer fra 0 til 2π vil z gjennomløpe enhetssirkelen $C : |z| = 1$ med positiv orientering, og residuteoremet gir

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta} + 1)^2}{(2e^{i\theta} + 1)^2} d\theta = \oint_C \frac{(z+1)^2}{(2z+1)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{\pi}{2}.$$

- 7 a)** Vi bruker Maclaurinrekka $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ (gyldig for alle z) med $3iz$ istedenfor z .

$$f(z) = e^{3iz} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3iz)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{n!} z^n = 3iz + \frac{(3i)^2}{2!} z^2 + \frac{(3i)^3}{3!} z^3 + \dots$$

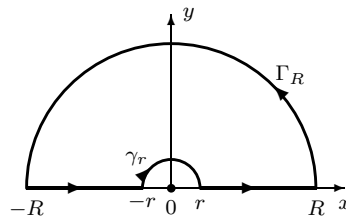
$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n}{n!} z^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(3i)^{n+2}}{(n+2)!} z^n = \frac{3i}{z} + \frac{(3i)^2}{2!} + \frac{(3i)^3}{3!} z + \dots \quad (z \neq 0)$$

- b)** Vi har $|e^{3iz} - 1| \leq |e^{3iz}| + |-1|$ ifølge trekantulikheten. $|e^{3iz}| = |e^{-3y+3ix}| = e^{-3y}$, og når $z \in \Gamma_R$ blir $|e^{3iz}| \leq 1$ og $|z| = R$. Da er $|g(z)| \leq 2/R^2$, og vi får ved ML -ulikheten:

$$\left| \int_{\Gamma_R} g(z) dz \right| \leq \frac{2}{R^2} \cdot \pi R \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g(z) dz = 0.$$

La C være konturen på figuren til høyre. Siden $g(z)$ er analytisk på og innenfor C , er $\oint_C g(z) dz = 0$ ifølge Cauchy's integralteorem. På intervallene $[-R, -r]$ og $[r, R]$ er $z = x$, $dz = dx$. Dermed er

$$\int_{-R}^{-r} g(x) dx + \int_{\gamma_r} g(z) dz + \int_r^R g(x) dx + \int_{\Gamma_R} g(z) dz = 0.$$



Av Laurentrekka i punkt a) ser vi at $g(z)$ har en enkel pol i $z = 0$ med $\operatorname{Res}_{z=0} g(z) = 3i$. Da er $\lim_{r \rightarrow 0} \left(-\int_{\gamma_r} g(z) dz \right) = \pi i \operatorname{Res}_{z=0} g(z) = -3\pi$ ifølge teorem i Kreyszig 15.4. Ovenfor har vi vist at $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g(z) dz = 0$. Dermed får vi

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-r} g(x) dx + \int_r^R g(x) dx \right) = -3\pi \quad \text{dvs.} \quad \text{pr.v.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix} - 1}{x^2} dx = -3\pi.$$

Integralet $\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 3x)/x^2 dx$ er konvergent, og realdelen til integralet ovenfor gir da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} dx = 3\pi.$$