SIF5012 Matematikk 4K
21. desember 2001

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 12 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5, 6ab, 7ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Vi kan finne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ved å bruke integralregelen 2 ganger:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s(s+3)}\right\} = 9\int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau = -3\left(e^{-3t}-1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s+3)}\right\} = \int_0^t 3\left(1-e^{-3\tau}\right)\,d\tau = 3t + e^{-3t} - 1$$

Eller, vi kan bruke delbrøkoppspalting: $\dfrac{9}{s^2(s+3)} = \dfrac{3}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+3}$.

For å finne $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, bruker vi skiftteorem 2:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-2s}\right\} = f(t-2)u(t-2) \\ &= \left[3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1\right]u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 3t + e^{-3(t-2)} - 7 & \text{for } t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Vi regner først ut $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$:

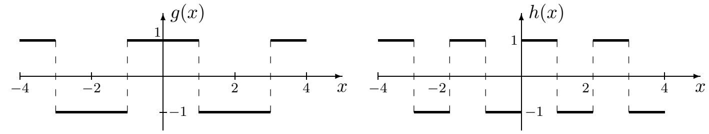
$$r(t) = 9 - 9u(t-2) \Rightarrow R(s) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \quad \text{eller:} \quad R(s) = \int_0^2 9e^{-st}\,dt = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

Vi Laplacetransformerer så initialverdiproblemet og bestemmer $Y = \mathcal{L}\{y\}$:

$$s^2Y - s\cdot 1 - (-3) + 3\,(sY-1) = \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}, \qquad s(s+3)Y = s + \frac{9}{s} - \frac{9e^{-2s}}{s}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s+3} + \frac{9}{s^2(s+3)} - \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)} = \frac{1}{s+3} + F(s) - G(s) \\ y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-3t} + f(t) - g(t) \\ &= e^{-3t} + \left(3t + e^{-3t} - 1\right) - \left[3(t-2) + e^{-3(t-2)} - 1\right]u(t-2) \\ &= \begin{cases} 2e^{-3t} + 3t - 1 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 2e^{-3t} - e^{-3(t-2)} + 6 & \text{for } t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ **a)** Grafen til den jevne, henholdsvis odde, 4-periodiske utvidelsen av f:



Vi søker cosinusrekka $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L)$. Her er $L = 2$ og Eulerformlene for koeffisientene gir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 dx + \int_1^2 (-1)\,dx\right] = 0 \\ a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Når n er partall, $n = 2m$, er $\sin n\pi/2 = \sin m\pi = 0$. Når n er oddetall, $n = 2m+1$, blir $\sin n\pi/2 = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Cosinusrekka blir dermed

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}.$$

b) Vi setter $x = 1/2$ i sinusrekka til f, og bruker at $\sin(2n+1)\pi/2 = (-1)^n$. Siden f er kontinuerlig for $x = 1/2$, og $f(1/2) = 1$, får vi

$$f(1/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}f(1/2) = \frac{\pi}{4}.$$

Sinusrekka $(*)$ er Fourierrekka til h. Siden h er kontinuerlig for $x = \pi$, er

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2+1)\pi^2}{2n+1} = h(\pi) = -1.$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - 2FG\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 2 = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{aligned} &F'' - kF = 0 \\ &G'' - (k+2)G = 0 \end{aligned}$$

Randbetingelsene medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ og, som i Kreyszig 11.3, får vi løsninger $F(x) \neq 0$ når $k = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Da blir $F_n(x) = \sin nx$. Ligningen for $G(t)$ blir

$$G'' + (n^2 - 2)G = 0 \quad \text{med løsning} \quad \begin{aligned} &G_1(t) = A_1e^t + B_1e^{-t} && \text{for } n = 1 \\ &G_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t && \text{for } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2-2}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_1(t)$ kan også skrives $G_1(t) = A_1^*\cosh t + B_1^*\sinh t$.) For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= F_1(x)G_1(t) = \left(A_1e^t + B_1e^{-t}\right)\sin x \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = \left(A_n\cos\sqrt{n^2-2}\,t + B_n\sin\sqrt{n^2-2}\,t\right)\sin nx, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

b) Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u(x,t)=\big(A_1e^t+B_1e^{-t}\big)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\big(A_n\cos\sqrt{n^2-2}\,t+B_n\sin\sqrt{n^2-2}\,t\big)\sin nx$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n=1,2,3,\dots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt.

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}=u(x,0)=(A_1+B_1)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}A_n\sin nx$$

(2) $$0=u_t(x,0)=(A_1-B_1)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}B_n\sqrt{n^2-2}\,\sin nx$$

Av (1) får vi $A_1+B_1=1$ og $A_n=1/n^4$ for $n\ge 2$. Av (2) får vi $A_1-B_1=0$ og $B_n=0$ for $n\ge 2$. Det gir $A_1=B_1=1/2$ og, siden $\frac12e^t+\frac12e^{-t}=\cosh t$,

$$u(x,t)=\cosh t\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos\sqrt{n^2-2}\,t\sin nx.$$

$\boxed{4}$ Integralligningen kan skrives $f(x)*e^{-bx^2}=e^{-x^2}$. Vi Fouriertransformerer ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte, og finner $\widehat{f}(w)=\mathcal{F}\{f(x)\}$:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\cdot\frac{1}{\sqrt{2b}}\,e^{-w^2/4b}=\frac{1}{\sqrt2}\,e^{-w^2/4}$$

$$\widehat{f}(w)=\frac{\sqrt b}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-w^2/4-(-w^2/4b)}=\frac{\sqrt b}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-w^2/4\beta}=\frac{\sqrt b\,\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\beta}}\,e^{-w^2/4\beta}$$

der $1/4\beta=1/4-1/4b$, dvs. $\beta=b/(b-1)$. Ved igjen å bruke den oppgitte Fouriertransformerte får vi

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\}=\frac{\sqrt b\,\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\beta x^2}=\frac{b}{\sqrt{\pi(b-1)}}\,e^{-bx^2/(b-1)}\,.$$

$\boxed{5}$ Funksjonen $u(x,y)=x^2-y^2+2e^x\cos y$ er harmonisk siden $u_{xx}+u_{yy}=0$.
Ifølge Cauchy–Riemannligningene må u og v oppfylle

(1) $v_y=u_x=2x+2e^x\cos y$ og (2) $v_x=-u_y=2y+2e^x\sin y$.

Ved å integrere (1) mhp. y og derivere svaret mhp. x, får vi

(3) $v=2xy+2e^x\sin y+h(x)$ og (4) $v_x=2y+2e^x\sin y+h'(x)$

der $h(x)$ er en vilkårlig funksjon av x. Sammenligner vi (2) og (4) ser vi at $h'(x)=0$, dvs. $h(x)=C$ (konstant). Dermed får vi $v(x,y)=2xy+2e^x\sin y+C$.

$\boxed{6}$ **a)** Singulære punkter for $f(z)=(z+1)^2/\big[z(2z+1)^2\big]$ er $z_1=0$ (en enkel pol) og $z_2=-1/2$ (pol av orden 2).

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}f(z)=\lim_{z\to0}[zf(z)]=\left[\frac{(z+1)^2}{(2z+1)^2}\right]_{z=0}=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}f(z)=\lim_{z\to-1/2}\frac{d}{dz}\big[(z+\tfrac12)^2f(z)\big]=\lim_{z\to-1/2}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+1)^2}{4z}\right]=\left[\frac{z^2-1}{4z^2}\right]_{z=-\frac12}=-\frac34$$

b) Vi setter $z=e^{i\theta}$, $dz=e^{i\theta}i\,d\theta=iz\,d\theta$. Når θ varierer fra 0 til 2π vil z gjennomløpe enhetssirkelen $C:|z|=1$ med positiv orientering, og residuteoremet gir

$$\int_0^{2\pi}\frac{\left(e^{i\theta}+1\right)^2}{\left(2e^{i\theta}+1\right)^2}\,d\theta=\oint_C\frac{(z+1)^2}{(2z+1)^2}\frac{dz}{iz}=\frac1i\oint_C f(z)\,dz=\frac{2\pi i}{i}\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)=\frac{\pi}{2}\,.$$

$\boxed{7}$ **a)** Vi bruker Maclaurinrekka $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}z^n/n!$ (gyldig for alle z) med $3iz$ istedenfor z.

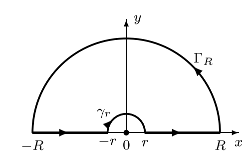
$$f(z)=e^{3iz}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3iz)^n}{n!}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n!}z^n=3iz+\frac{(3i)^2}{2!}z^2+\frac{(3i)^3}{3!}z^3+\cdots$$

$$g(z)=\frac{f(z)}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n!}z^{n-2}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(3i)^{n+2}}{(n+2)!}z^n=\frac{3i}{z}+\frac{(3i)^2}{2!}+\frac{(3i)^3}{3!}z+\cdots\qquad(z\neq0)$$

b) Vi har $|e^{3iz}-1|\le|e^{3iz}|+|-1|$ ifølge trekantulikheten. $|e^{3iz}|=|e^{-3y+3ix}|=e^{-3y}$, og når $z\in\Gamma_R$ blir $|e^{3iz}|\le1$ og $|z|=R$. Da er $|g(z)|\le 2/R^2$, og vi får ved ML-ulikheten:

$$\left|\int_{\Gamma_R}g(z)\,dz\right|\le\frac{2}{R^2}\cdot\pi R\quad\Longrightarrow\quad\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}g(z)\,dz=0.$$

La C være konturen på figuren til høyre. Siden $g(z)$ er analytisk på og innenfor C, er $\oint_C g(z)\,dz=0$ ifølge Cauchys integralteorem. På intervallene $[-R,-r]$ og $[r,R]$ er $z=x$, $dz=dx$. Dermed er



$$\int_{-R}^{-r}g(x)\,dx+\int_{\gamma_r}g(z)\,dz+\int_r^R g(x)\,dx+\int_{\Gamma_r}g(z)\,dz=0.$$

Av Laurentrekka i punkt a) ser vi at $g(z)$ har en enkel pol i $z=0$ med $\operatorname{Res}_{z=0}g(z)=3i$. Da er $\lim_{r\to0}\left(-\int_{\gamma_r}g(z)\,dz\right)=\pi i\operatorname{Res}_{z=0}g(z)=-3\pi$ ifølge teorem i Kreyszig 15.4. Ovenfor har vi vist at $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}g(z)=0$. Dermed får vi

$$\lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{-r}g(x)\,dx+\int_r^R g(x)\,dx\right)=-3\pi\quad\text{dvs.}\quad\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3ix}-1}{x^2}\,dx=-3\pi.$$

Integralet $\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos3x)/x^2\,dx$ er konvergent, og realdelen til integalet ovenfor gir da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos3x}{x^2}\,dx=3\pi\,.$$