

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5ab og 6ab som teller likt ved bedømmelsen.

- 1** a) Funksjonen $f(t)$ kan uttrykkes ved hjelp av Heavisidefunksjonen (stepfunksjonen) $u(t)$ som

$$f(t) = (t - 1)^2 u(t - 1).$$

Av transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{h(t - a)u(t - a)\} = H(s)e^{-as}$ får vi, siden $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$,

$$F(s) = \frac{2}{s^3} e^{-s}.$$

Fra regelen om den Laplacetransformerte til et integral, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} = (1/s)F(s)$, finner vi at den Laplacetransformerte til $g(t)$ er

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{2}{s^4} e^{-s}.$$

- b) Vi setter $X_1 = \mathcal{L}\{x_1\}$ og $X_2 = \mathcal{L}\{x_2\}$. Den Laplacetransformerte av differensialligningssystemet blir det lineære systemet

$$\begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - (sX_2 - 1) &= G(s) \end{aligned} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - sX_2 &= G(s) - 1. \end{aligned}$$

Vi kan løse ligningssystemet f.eks. ved å gange den andre ligningen med s og trekke den fra den første. Det gir $X_2 + s^2 X_2 = F(s) - sG(s) + s = s$ (siden $sG(s) = F(s)$) og dermed

$$X_2 = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

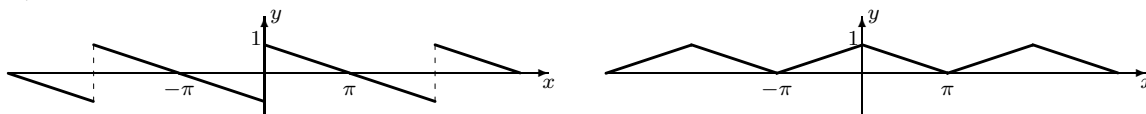
For X_1 får vi

$$X_1 = sX_2 + G(s) - 1 = G(s) - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{2}{s^4} e^{-s} - \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}(2/s^4) = t^3/3$ får vi ved invers Laplacetransformasjon at

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(t - 1)^3 u(t - 1) - \sin t \\ x_2 &= \cos t. \end{aligned}$$

- 2** a) Grafen til den odde, henholdsvis jevne, 2π -periodiske utvidelsen av f :



Koeffisientene i sinusrekka er gitt ved formelen

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx.$$

Vi benytter delvis integrasjon og får

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx}_0 = \frac{2}{n\pi}.$$

Sinusrekka til f er Fourierrekka til g . Altså er

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Når $x = 31\pi/2$ har vi, fordi g er odde og periodisk med periode 2π , at summen av rekka er

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(31\pi/2)}{n} = g(16\pi - \pi/2) = g(-\pi/2) = -g(\pi/2) = \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

b) Dersom $u(x, t) = F(x)G(t)$ tilfredsstiller (*) og (**), må vi ha

$$F'' = kF, \quad G' = kc^2G \quad \text{og} \quad F(0) = F(\pi) = 0.$$

Fra Kreyszig 11.5 vet vi at alle ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = B_n^* \sin nx$ for $k = -n^2$ der $n = 1, 2, 3, \dots$ og B_n^* er konstant. For $G(t)$ får vi $G_n(t) = C_n e^{-n^2 c^2 t}$ der C_n er konstant, og altså

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n e^{-n^2 c^2 t} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (B_n = B_n^* C_n).$$

Siden (*) er lineær og homogen, er summen $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ også en løsning, og den oppfyller (**). Vi setter følgelig $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 c^2 t} \sin nx$ og bestemmer koeffisientene B_n slik at initialbetingelsen blir oppfylt.

Vi skal ha $1 - x/\pi = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $B_n = 2/(n\pi)$ og følgelig

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 c^2 t} \sin nx.$$

3 a) For de Fouriertransformerte får vi

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iwx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-e^{-iwx}}{iw} \right]_{-1}^1 = \frac{-e^{-iw} + e^{iw}}{iw\sqrt{2\pi}} = \frac{2i \sin w}{iw\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w} \\ \hat{g}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(1+iw)x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-e^{-(1+iw)x}}{1+iw} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-iw}{1+w^2}. \end{aligned}$$

(Vi brukte at $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} e^{-iwx} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (\cos wx - i \sin wx) = 0$.)

b) Vi har $\mathcal{F}\{h(x)\} = \mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{g}(w)$ ifølge konvolusjonsregelen. Siden $h(x)$ er kontinuerlig, får vi ved hjelp av formelen for invers Fouriertransformert at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{g}(w) e^{iwx} \, dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-iw) \sin w}{w(1+w^2)} e^{iwx} \, dw.$$

Setter vi $x = 0$, får vi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-iw) \sin w}{w(1+w^2)} \, dw = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-p)g(p) \, dp = \int_{-1}^1 g(p) \, dp = \int_0^1 e^{-p} \, dp = 1 - e^{-1}.$$

Det søkte integralet er realdelen av integralet på venstresiden. Siden høyresiden er reell, får vi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w(1+w^2)} dw = 1 - e^{-1} \quad \text{dvs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w(1+w^2)} dw = \pi(1 - e^{-1}).$$

4 Vi multipliserer med e^z og løser ligningen vi får med hensyn på e^z :

$$(e^z)^2 - 2ie^z + 1 = 0 \quad \text{som gir} \quad e^z = \frac{2i \pm \sqrt{-8}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})i.$$

Dermed blir $z = \ln[(1 \pm \sqrt{2})i]$, og siden $\ln w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w + 2k\pi i$ får vi

$$z = z_{1,k} = \ln[(1 + \sqrt{2})i] = \ln(\sqrt{2} + 1) + \pi i/2 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ og}$$

$$z = z_{2,k} = \ln[(1 - \sqrt{2})i] = \ln(\sqrt{2} - 1) - \pi i/2 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

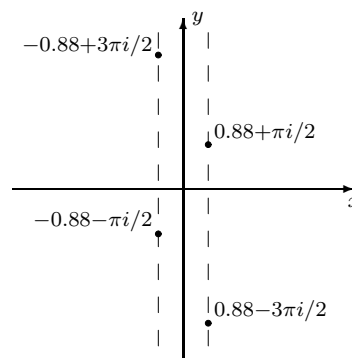
Løsningene ligger altså på de to vertikale linjene

$$x = \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0.88$$

og

$$x = \ln(\sqrt{2} - 1) \approx -0.88$$

og avstanden mellom to naboløsninger på samme linje er $2\pi \approx 6.28$.



5 a) Funksjonen $f(z) = e^{i\pi z}/(z^4 + 4)$ har singulære punkter der nevneren er 0. Det er når $z^4 = -4 = 4e^{\pi i + 2k\pi i}$, altså når

$$z = z_k = \sqrt{2} e^{(2k+1)\pi i/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Nullpunktene er av første orden, og siden telleren $e^{i\pi z} \neq 0$ har $f(z)$ enkel pol i punktene

$$z_0 = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = 1 + i,$$

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

Det eneste singulære punktet i første kvadrant er $z_0 = 1 + i$, og residuet er

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \left[\frac{e^{i\pi z}}{(z^4 + 4)'} \right]_{z=z_0} = \frac{e^{i\pi z_0}}{4z_0^3} = \frac{z_0 e^{i\pi(1+i)}}{4z_0^4} = \frac{(1+i)e^{i\pi-\pi}}{4(-4)} = \frac{(1+i)e^{-\pi}}{16}.$$

b) Vi kan anta $R > \sqrt{2}$ (siden vi skal la $R \rightarrow \infty$).

Vi har $|e^{i\pi z}| = |e^{i\pi(x+iy)}| = |e^{i\pi x}| |e^{-\pi y}| = e^{-\pi y}$ og $|z^4 + 4| \geq |z|^4 - 4$. På Γ_R er $y \geq 0$ og $|z| = R$ og følgelig $|f(z)| \leq 1/(R^4 - 4)$ for alle $z \in \Gamma_R$. Ved hjelp av *ML*-ulikheten får vi

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4} dz \right| \leq \frac{1}{R^4 - 4} \cdot \frac{\pi R}{2} \quad \text{og følgelig} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4} dz = 0.$$

Det singulære punktet z_0 ligger innenfor kurven C_R (se figuren). Av residuteoremet får vi

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\pi(i-1)}{8} e^{-\pi}.$$

Siden $z = x$, $dz = dx$ på x -aksen og $z = iy$, $dz = i dy$ på y -aksen, er

$$\oint_{C_R} f(z) dz = \int_0^R \frac{e^{i\pi x}}{x^4 + 4} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4} dz + \left(- \int_0^R \frac{e^{i\pi iy}}{(iy)^4 + 4} i dy \right)$$

og dermed får vi

$$\int_0^R \frac{e^{i\pi x}}{x^4 + 4} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4} dz - i \int_0^R \frac{e^{-\pi y}}{y^4 + 4} dy = \frac{\pi(i-1)}{8} e^{-\pi}.$$

Vi lar $R \rightarrow \infty$ og setter inn $e^{i\pi x} = \cos \pi x + i \sin \pi x$. Det gir

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x + i \sin \pi x}{x^4 + 4} dx + 0 - i \int_0^\infty \frac{e^{-\pi y}}{y^4 + 4} dy = \frac{\pi(i-1)}{8} e^{-\pi}.$$

Ved å ta realdel og imaginærdel får vi, siden $\int_0^\infty e^{-\pi y}/(y^4 + 4) dy = \int_0^\infty e^{-\pi x}/(x^4 + 4) dx$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx = -\frac{\pi}{8} e^{-\pi} \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{\sin \pi x - e^{-\pi x}}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{8} e^{-\pi}.$$

- 5** a) Av formen på det gitte området ser vi at sentrum i Laurentrekka skal være $z_0 = 0$. Ved å bruke summeformelen $1/(1-q) = \sum_{n=0}^\infty q^n$ (for $|q| < 1$) for en geometrisk rekke, får vi

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2z/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{2z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n z^n}{3^{n+1}}, \quad \left|\frac{2z}{3}\right| < 1.$$

Dermed får vi

$$g(z) = \frac{1}{z^2(3-2z)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n z^{n-2}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{4}{27} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^n z^n.$$

Laurentrekka er gyldig når $|2z/3| < 1$ og $z \neq 0$, dvs. for $0 < |z| < 3/2$. Altså er $R = 3/2$. Dette følger også av at R er avstanden fra z_0 til nærmeste singulære punkt $z_1 = 3/2$.

- b) Vi bruker Maclaurinrekka $e^z = \sum_{n=0}^\infty z^n/n!$ med $1/z^p$ istedenfor z , $z \neq 0$. Det gir

$$\begin{aligned} h(z) &= z^{p-1} e^{1/z^p} = z^{p-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n! (z^p)^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n! z^{(n-1)p+1}} \\ &= z^{p-1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)! z^{np+1}} = z^{p-1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^{p+1}} + \frac{1}{3! z^{2p+1}} + \dots \quad (z \neq 0). \end{aligned}$$

De singulære punktene for $f(z) = g(z) + h(z)$ er $z_0 = 0$ og $z_1 = 3/2$. Legger vi sammen Laurentrekkene for $g(z)$ og $h(z)$, ser vi at $f(z)$ har et vesentlig singulært punkt i $z_0 = 0$ og $\text{Res}_{z=0} f(z) = 2/9 + 1 = 11/9$.

I $z_1 = 3/2$ har $g(z)$ en enkel pol og $h(z)$ er analytisk. Dermed har $f(z)$ en enkel pol i $z_1 = 3/2$, og residuet er

$$\text{Res}_{z=3/2} f(z) = \frac{1}{[z^2(3-2z)]'} \Big|_{z=3/2} + 0 = \frac{1}{2z(3-2z) + z^2(-2)} \Big|_{z=3/2} = -\frac{2}{9}.$$