NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5012 Matematikk 4K eksamen 20.12.02

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5ab og 6ab som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Funksjonen $f(t)$ kan uttrykkes ved hjelp av Heavisidefunksjonen (stepfunksjonen) $u(t)$ som

$$f(t) = (t-1)^2 u(t-1).$$

Av transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{h(t-a)u(t-a)\} = H(s)e^{-as}$ får vi, siden $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$,

$$F(s) = \frac{2}{s^3}e^{-s}.$$

Fra regelen om den Laplacetransformerte til et integral, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} = (1/s)F(s)$, finner vi at den Laplacetransformerte til $g(t)$ er

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{2}{s^4}e^{-s}.$$

b) Vi setter $X_1 = \mathcal{L}\{x_1\}$ og $X_2 = \mathcal{L}\{x_2\}$. Den Laplacetransformerte av differensialligningssystemet blir det lineære systemet

$$\begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - (sX_2 - 1) &= G(s) \end{aligned} \quad \text{dvs.} \quad \begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - sX_2 &= G(s) - 1. \end{aligned}$$

Vi kan løse ligningssystemet f.eks. ved å gange den andre ligningen med s og trekke den fra den første. Det gir $X_2 + s^2X_2 = F(s) - sG(s) + s = s$ (siden $sG(s) = F(s)$) og dermed

$$X_2 = \frac{s}{s^2+1}.$$

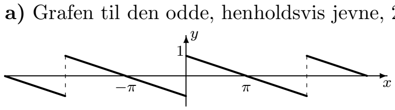
For X_1 får vi

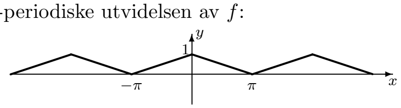
$$X_1 = sX_2 + G(s) - 1 = G(s) - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{s^4}e^{-s} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}(2/s^4) = t^3/3$ får vi ved invers Laplacetransformasjon at

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}(t-1)^3u(t-1) - \sin t \\ x_2 &= \cos t. \end{aligned}$$

2 **a)** Grafen til den odde, henholdsvis jevne, 2π-periodiske utvidelsen av f:





Koeffisientene i sinusrekka er gitt ved formelen

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx.$$

Vi benytter delvis integrasjon og får

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx}_{0} = \frac{2}{n\pi}.$$

Sinusrekka til f er Fourierrekka til g. Altså er

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}.$$

Når $x = 31\pi/2$ har vi, fordi g er odde og periodisk med periode 2π, at summen av rek
er

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n(31\pi/2)}{n} = g(16\pi - \pi/2) = g(-\pi/2) = -g(\pi/2) = \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ tilfredsstiller $(*)$ og $(**)$, må vi ha

$$F'' = kF, \quad G' = kc^2G \quad \text{og} \quad F(0) = F(\pi) = 0.$$

Fra Kreyszig 11.5 vet vi at alle ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = B_n^*\sin nx$ f
$k = -n^2$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$ og B_n^* er konstant. For $G(t)$ får vi $G_n(t) = C_ne^{-n^2c^2t}$ der
er konstant, og altså

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_ne^{-n^2c^2t}\sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (B_n = B_n^*C$$

Siden $(*)$ er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t)$ også en løsning,
den oppfyller $(**)$. Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty B_ne^{-n^2c^2t}\sin nx$ og bestemmer koef
sientene B_n slik at initialbetingelsen blir oppfylt.

Vi skal ha $1 - x/\pi = u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty B_n\sin nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får
$B_n = 2/(n\pi)$ og følgelig

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}e^{-n^2c^2t}\sin nx.$$

3 **a)** For de Fouriertransformerte får vi

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{-iwx}}{iw}\right]_{-1}^1 = \frac{-e^{-iw}+e^{iw}}{iw\sqrt{2\pi}} = \frac{2i\sin w}{iw\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$$

$$\widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+iw)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{-(1+iw)x}}{1+iw}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-iw}{1+w^2}.$$

(Vi brukte at $\lim_{x\to\infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{-iwx} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(\cos wx - \sin wx) =$

b) Vi har $\mathcal{F}\{h(x)\} = \mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)$ ifølge konvolusjonsregelen. Sid
$h(x)$ er kontinuerlig, får vi ved hjelp av formelen for invers Fouriertransformert at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\cdot\widehat{g}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)e^{iwx}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)}e^{iwx}\,d$$

Setter vi $x = 0$, får vi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(1-iw)\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = h(0) = \int_{-\infty}^\infty f(-p)g(p)\,dp = \int_{-1}^1 g(p)\,dp = \int_0^1 e^{-p}\,dp = 1-e$$

Det søkte integralet er realdelen av integralet på venstresiden. Siden høyresiden er reell, får vi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = 1-e^{-1} \qquad \text{dvs.} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = \pi(1-e^{-1}).$$

$\boxed{4}$ Vi multipliserer med e^z og løser ligningen vi får med hensyn på e^z:

$$(e^z)^2 - 2ie^z + 1 = 0 \qquad \text{som gir} \qquad e^z = \frac{2i\pm\sqrt{-8}}{2} = (1\pm\sqrt{2}\,)i.$$

Dermed blir $z = \ln\left[(1\pm\sqrt{2}\,)i\right]$, og siden $\ln w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w + 2k\pi i$ får vi

$$\begin{aligned} z = z_{1,k} &= \ln\left[(1+\sqrt{2}\,)i\right] = \ln(\sqrt{2}+1) + \pi i/2 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots\,, \text{ og}\\ z = z_{2,k} &= \ln\left[(1-\sqrt{2}\,)i\right] = \ln(\sqrt{2}-1) - \pi i/2 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots\,. \end{aligned}$$

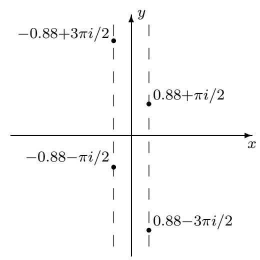
Løsningene ligger altså på de to vertikale linjene

$$x = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0.88$$

og

$$x = \ln(\sqrt{2}-1) \approx -0.88$$

og avstanden mellom to naboløsninger på samme linje er $2\pi \approx 6.28$.

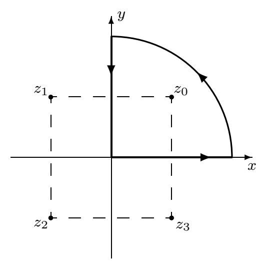


$\boxed{5}$ **a)** Funksjonen $f(z) = e^{i\pi z}/(z^4+4)$ har singulære punkter der nevneren er 0. Det er når $z^4 = -4 = 4e^{\pi i + 2k\pi i}$, altså når

$$z = z_k = \sqrt{2}\,e^{(2k+1)\pi i/4}, \quad k = 0,\,1,\,2,\,3.$$

Nullpunktene er av første orden, og siden telleren $e^{i\pi z} \neq 0$ har $f(z)$ enkel pol i punktene

$$z_0 = \sqrt{2}\,(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}\,) = 1+i,$$
$$z_1 = -1+i, \quad z_2 = -1-i, \quad z_3 = 1-i.$$



Det eneste singulære punktet i første kvadrant er $z_0 = 1+i$, og residuet er

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \left[\frac{e^{i\pi z}}{(z^4+4)'}\right]_{z=z_0} = \frac{e^{i\pi z_0}}{4z_0^3} = \frac{z_0 e^{i\pi(1+i)}}{4z_0^4} = \frac{(1+i)e^{i\pi-\pi}}{4(-4)} = \frac{(1+i)e^{-\pi}}{16}.$$

b) Vi kan anta $R > \sqrt{2}$ (siden vi skal la $R\to\infty$).
Vi har $|e^{i\pi z}| = |e^{i\pi(x+iy)}| = |e^{i\pi x}||e^{-\pi y}| = e^{-\pi y}$ og $|z^4+4| \geq |z|^4 - 4$. På Γ_R er $y \geq 0$ og $|z| = R$ og følgelig $|f(z)| \leq 1/(R^4-4)$ for alle $z \in \Gamma_R$. Ved hjelp av ML-ulikheten får vi

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\,dz\right| \leq \frac{1}{R^4-4}\cdot\frac{\pi R}{2} \qquad \text{og følgelig} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\,dz = 0.$$

Det singulære punktet z_0 ligger innenfor kurven C_R (se figuren). Av residuteoremet får vi

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\pi(i-1)}{8}e^{-\pi}.$$

Siden $z = x$, $dz = dx$ på x-aksen og $z = iy$, $dz = i\,dy$ på y-aksen, er

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\,dz + \left(-\int_0^R \frac{e^{i\pi iy}}{(iy)^4+4}\,i\,dy\right)$$

og dermed får vi

$$\int_0^R \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{e^{i\pi z}}{z^4+4}\,dz - i\int_0^R \frac{e^{-\pi y}}{y^4+4}\,dy = \frac{\pi(i-1)}{8}e^{-\pi}.$$

Vi lar $R\to\infty$ og setter inn $e^{i\pi x} = \cos\pi x + i\sin\pi x$. Det gir

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi x + i\sin\pi x}{x^4+4}\,dx + 0 - i\int_0^\infty\frac{e^{-\pi y}}{y^4+4}\,dy = \frac{\pi(i-1)}{8}e^{-\pi}.$$

Ved å ta realdel og imaginærdel får vi, siden $\int_0^\infty e^{-\pi y}/(y^4+4)\,dy = \int_0^\infty e^{-\pi x}/(x^4+4)$ d

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi x}{x^4+4}\,dx = -\frac{\pi}{8}e^{-\pi} \qquad \text{og} \qquad \int_0^\infty\frac{\sin\pi x - e^{-\pi x}}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8}e^{-\pi}.$$

$\boxed{5}$ **a)** Av formen på det gitte området ser vi at sentrum i Laurentrekka skal være $z_0 = 0$. V
å bruke summeformelen $1/(1-q) = \sum_{n=0}^\infty q^n$ (for $|q|<1$) for en geometrisk rekke, får

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2z/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{2z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty\frac{2^n z^n}{3^{n+1}}, \qquad \left|\frac{2z}{3}\right| < 1.$$

Dermed får vi

$$g(z) = \frac{1}{z^2(3-2z)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^\infty\frac{2^n z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^\infty\frac{2^n z^{n-2}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{4}{27}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{2}{3}\right)^n z^n.$$

Laurentrekka er gyldig når $|2z/3| < 1$ og $z \neq 0$, dvs. for $0 < |z| < 3/2$. Altså er $R = 3/$
Dette følger også av at R er avstanden fra z_0 til nærmeste singulære punkt $z_1 = 3/2$.

b) Vi bruker Maclaurinrekka $e^z = \sum_{n=0}^\infty z^n/n!$ med $1/z^p$ istedenfor z, $z\neq 0$. Det gir

$$\begin{aligned} h(z) &= z^{p-1}e^{1/z^p} = z^{p-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!\,(z^p)^n} = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!\,z^{(n-1)p+1}}\\ &= z^{p-1} + \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(n+1)!\,z^{np+1}} = z^{p-1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^{p+1}} + \frac{1}{3!\,z^{2p+1}} + \cdots \qquad (z\neq 0). \end{aligned}$$

De singulære punktene for $f(z) = g(z) + h(z)$ er $z_0 = 0$ og $z_1 = 3/2$. Legger vi samm
Laurentrekkene for $g(z)$ og $h(z)$, ser vi at $f(z)$ har et vesentlig singulært punkt i $z_0 =$
og $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2/9 + 1 = 11/9$.

I $z_1 = 3/2$ har $g(z)$ har en enkel pol og $h(z)$ er analytisk. Dermed har $f(z)$ en enkel po
$z_1 = 3/2$, og residuet er

$$\operatorname*{Res}_{z=3/2} f(z) = \left.\frac{1}{[z^2(3-2z)]'}\right|_{z=3/2} + 0 = \left.\frac{1}{2z(3-2z)+z^2(-2)}\right|_{z=3/2} = -\frac{2}{9}.$$