SIF5012 Matematikk 4K
2. august 2001

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1abc, 2ab, 3, 4, 5, 6, 7ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Vi regner ut $F(s)$ og $g(t)$ ved å bruke tabell og reglene for Laplacetransformasjonen.

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin t + t\cos t) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}e^{-2\pi s}\right) = \cos t - \cos(t-2\pi)u(t-2\pi) \\ &= [1-u(t-2\pi)]\cos t = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Vi setter $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen ved bl.a. å bruke skiftteorem 2 siden $r(t) = 2\cos t\,[1-u(t-2\pi)] = 2\cos t - 2\cos(t-2\pi)\,u(t-2\pi)$. (Eller ved å bruke resultatet fra **a)** siden $r(t) = 2g(t)$.)

$$sY + \frac{1}{s}Y = \frac{2s}{s^2+1}\left(1-e^{-2\pi s}\right) \;\Rightarrow\; Y = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}\left(1-e^{-2\pi s}\right) = F(s)\left(1-e^{-2\pi s}\right)$$

Ved inverstransformeringen bruker vi skiftteorem 2 og $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$ fra **a)**.

$$\begin{aligned} y &= (\sin t + t\cos t) - [\sin(t-2\pi) + (t-2\pi)\cos(t-2\pi)]\,u(t-2\pi) \\ &= (\sin t + t\cos t) - [\sin t + (t-2\pi)\cos t]\,u(t-2\pi) = \begin{cases} \sin t + t\cos t & (0 < t < 2\pi) \\ 2\pi\cos t & (t > 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

c) Vi setter igjen $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen.

$$s^2Y - s + 4(sY-1) + 8Y = 2e^{-2\pi s} \;\Rightarrow\; Y = \frac{s+4}{s^2+4s+8} + \frac{2}{s^2+4s+8}e^{-2\pi s}$$

Vi omformer Y og inverstransformerer ved hjelp av begge skiftteoremene.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+2^2} + \frac{2}{(s+2)^2+2^2}e^{-2\pi s} \\ y &= e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) + e^{-2(t-2\pi)}\sin 2(t-2\pi)u(t-2\pi) \\ &= e^{-2t}\left[\cos 2t + \sin 2t + e^{4\pi}\sin 2t\,u(t-2\pi)\right] \end{aligned}$$

Svaret er altså

$$y = \begin{cases} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ e^{-2t}\left(\cos 2t + (1+e^{4\pi})\sin 2t\right) & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ **a)** Funksjonene $u(x,y) = y$ og $u(x,y) = \cos nx \sinh ny$ oppfyller (i), (ii) og (iii). De to andre funksjonene oppfyller (i) og (ii), men ikke (iii).

For å finne en løsning som også oppfyller (iv), betrakter vi summen

$$u(x,y) = C_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh ny$$

og bestemmer konstantene C_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at $u(x,\pi) = 1 - \cos 2x$.

$$1 - \cos 2x \overset{\text{(iv)}}{=} u(x,\pi) = C_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh n\pi \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1/\pi \\ C_2 = -1/\sinh 2\pi \\ C_n = 0 \text{ for } n \neq 0, 2 \end{cases}$$

En funksjon som er løsning av (i) og oppfyller randbetingelsene (ii), (iii) og (iv) er dermed

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} - \frac{\cos 2x \sinh 2y}{\sinh 2\pi}.$$

b) Vi setter inn $u(x,y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii) og (v).

$$F''G' + FG'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad \text{(konstant)}$$

$$\text{(I)} \quad F'' - kF = 0, \quad F(0) \overset{\text{(v)}}{=} 0,\; F'(\pi) \overset{\text{(v)}}{=} 0, \qquad \text{(II)} \quad G'' + kG = 0, \quad G(0) \overset{\text{(ii)}}{=} 0$$

Bestemmer først $F(x)$ og deretter $G(y)$.

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} \quad F'' - kF = 0,\; F(0) = 0,\; F'(\pi) = 0 & \\
k > 0,\;\; k = \mu^2 : & F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\; F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x} \\
 & F(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\; F(x) = 0 \\
k = 0 : & F(x) = A + Bx,\; F'(x) = B \\
 & F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0,\; F(x) = 0 \\
k < 0,\;\; k = -p^2 : & F(x) = A\cos px + B\sin px,\; F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px \\
 & F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0,\; A = 0,\; B \neq 0 \;\Rightarrow \cos p\pi = 0 \\
 & p = (2m+1)/2, \quad F(x) = \sin[(2m+1)x/2] \quad (B = 1)
\end{array}$$

$$\text{(II)} \quad G'' + kG = 0, \quad k = -\left[(2m+1)/2\right]^2, \quad G(0) = 0$$

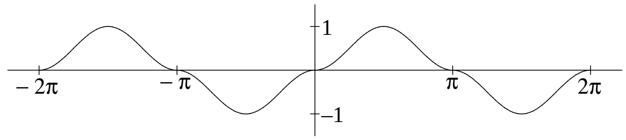
$$G'' - \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 G = 0 \;\Rightarrow\; G(y) = Ae^{(2m+1)y/2} + Be^{-(2m+1)y/2}$$

$$G(0) = 0 \Rightarrow B = -A,\; G(y) = A\big(e^{(2m+1)y/2} - e^{-(2m+1)y/2}\big) = C\sinh[(2m+1)y/2]$$

Løsningene av (i) på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (ii) og (v):

$$u(x,y) = C\sin\frac{(2m+1)x}{2}\sinh\frac{(2m+1)y}{2}, \quad C \text{ vilkårlig konstant, } m = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

$\boxed{3}$ Summen av Fouriersinusrekka er den odde 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$.



For $x = \pi/2$ er $f(x) = 1$ og $\sin(2m+1)x = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Ergo er

$$1 = -\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

$\boxed{4}$ Ligningen kan skrives $f(x) = e^{-|x|} - 4f(x) * e^{-|x|}$. Vi setter $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ og Fouriertransformerer ligningen ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte.

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2} - 4\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

$$\left(1 + \frac{8}{1+w^2}\right)\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{9+w^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{3^2+w^2} \quad\Longrightarrow\quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} = \frac{1}{3}e^{-3|x|}$$

der vi inverstransformerte ved hjelp av den oppgitte Fouriertransformerte med $a = 3$.

$\boxed{5}$ Cauchy-Riemanns ligninger, $u_x = v_y$ og $u_y = -v_x$, må være oppfylte. Her er $u = x^2 + ay^2 - y$ og $v = 2xy + bx + 2$. Vi får

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & v_y &= 2x, \\ u_y &= 2ay - 1, & -v_x &= -2y - b. \end{aligned}$$

Vi ser at vi må ha $a = -1$ og $b = 1$.

Da er $f(z) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + 2)$, og ved omskrivingen $f(z) = (x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + 2i$, eller ved å innføre $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, får vi

$$f(z) = z^2 + iz + 2i.$$

$\boxed{6}$ Ligningen $3\cos z = 4i$ er ekvivalent med $3e^{iz} + 3e^{-iz} = 8i$. Vi multipliserer med e^{iz} og løser mhp. e^{iz}.

$$3\left(e^{iz}\right)^2 - 8ie^{iz} + 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad e^{iz} = \frac{8i \pm 10i}{6} \quad \text{dvs.} \quad e^{iz_1} = 3i \quad \text{og} \quad e^{iz_2} = -\tfrac{1}{3}i$$

$$iz_1 = \ln(3i) = \ln|3i| + i\arg(3i) = \ln 3 + i(\pi/2 + 2k\pi),\ \ z_1 = (\pi/2 - i\ln 3) + 2k\pi$$

$$iz_2 = \ln\left(-\tfrac{1}{3}i\right) = -\ln 3 + i(-\pi/2 + 2k\pi),\ \ z_2 = (-\pi/2 + i\ln 3) + 2k\pi$$

Løsningene er altså $z = \pm(\pi/2 - i\ln 3) + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$\boxed{7}$ **a)** Singulære punkter for $f(z) = 1/(z^2 - 2z + 2)$: $\quad z^2 - 2z + 2 = 0$ som gir $z = 1 \pm i$. Begge er enkle poler, bare $z_0 = 1 + i$ ligger i første kvadrant, og $|z_0| = \sqrt{2}$.

Når $R < \sqrt{2}$ er $f(z)$ analytisk på og innenfor C_R. Ifølge Cauchys integralteorem er

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = 0.$$

Når $R > \sqrt{2}$ er $z_0 = 1 + i$ innenfor C_R. Residuteoremet gir

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2\pi i}{(z^2 - 2z + 2)'}\bigg|_{z=z_0} = \frac{2\pi i}{2z - 2}\bigg|_{z=z_0} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

b) La $z \in \Gamma_R$. Da er $|z| = R$ og $|z^2 - 2z + 2| \geq |z^2 - 2z| - |2| \geq |z|^2 - |2z| - 2 = R^2 - 2R - 2$ ifølge trekantulikheten. Ergo er, for $z \in \Gamma_R$,

$$\left|\frac{1}{(z^2 - 2z + 2)}\right| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \qquad (\text{når } \mathrm{R}^2 - 2R - 2 > 0 \text{ dvs. når } R > 1 + \sqrt{3}).$$

ML-ulikheten gir

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2}\right| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \cdot \frac{\pi R}{2} \quad \text{og følgelig er} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 2} = 0.$$

På x-aksen er $z = x$, $dz = dx$, og på y-aksen er $z = iy$, $dz = i\,dy$. Av resultatene ovenfor får vi

$$\int_0^R \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \left(-\int_0^R \frac{i\,dy}{(iy)^2 - 2(iy) + 2}\right) = \pi \quad (\text{for } R > \sqrt{2})$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} + \int_0^\infty \frac{i\,dy}{(y^2 - 2) + 2iy} = \pi.$$

Siden høyresiden er reell, må venstresidens imaginærdel være null.

$$\frac{i}{(y^2 - 2) + 2iy} = \frac{i}{(y^2 - 2) + 2iy} \cdot \frac{(y^2 - 2) - 2iy}{(y^2 - 2) - 2iy} = \frac{2y + i(y^2 - 2)}{y^4 + 4}$$

Dermed er

$$\int_0^\infty \frac{y^2 - 2}{y^4 + 4}\,dy = 0 \qquad \left(\text{og} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} + \int_0^\infty \frac{2y}{y^4 + 4}\,dy = \pi\right).$$