Oppgavesettet har 11 punkter, 1abc, 2, 3ab, 4, 5, 6, 7ab, som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Av $\mathcal{L}\{u(t-b)\} = (1/s)e^{-bs}$ følger ved skiftteorem 1 at

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}u(t-b)\} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

Vi kan også omforme $f(t)$ og bruke linearitet og skiftteorem 2 for å finne $\mathcal{L}(f)$. Siden $e^{at} = e^{a(t-b+b)} = e^{ab}e^{a(t-b)}$ og $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$ får vi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{ab}\mathcal{L}\{e^{a(t-b)}u(t-b)\} = e^{ab}\cdot e^{-bs}\frac{1}{s-a} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

En tredje måte å finne $\mathcal{L}(f)$ på, er å regne ut integralet $\int_b^\infty e^{at}e^{-st}\,dt$.

b) Vi Laplacetransformerer initialverdiproblemet (ved å bruke resultatet i (a) med $a = b = 1$) og løser den transformerte ligningen mhp. $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$(s^2Y - s) - 2(sY-1) + Y = \frac{e^{-(s-1)}}{s-1}, \qquad (s-1)^2Y = s - 2 + \frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-2}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} \\ &= \frac{(s-1)-1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3}. \end{aligned}$$

Vi har $\mathcal{L}^{-1}(1/s^{n+1}) = t^n/n!$ og $\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}/s^2) = \frac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)$. Dermed får vi av skiftteorem 1 at

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^t[\,1 - t + \tfrac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)\,] = e^t - te^t + \tfrac{1}{2}(t-1)^2e^tu(t-1).$$

c) Fra a) har vi $\mathcal{L}(f) = e^{-b(s-a)}/(s-a)$. Av konvolusjonsteoremet følger

$$\mathcal{L}(f*f) = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}\cdot\frac{e^{-b(s-a)}}{s-a} = \frac{e^{-2b(s-a)}}{(s-a)^2} = e^{2ba}\cdot e^{-2bs}\frac{1}{(s-a)^2}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^2\} = te^{at}$, følger av skiftteorem 1 at

$$(f*f)(t) = e^{2ba}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2bs}}{(s-a)^2}\right\} = e^{2ba}(t-2b)e^{a(t-2b)}u(t-2b) = (t-2b)e^{at}u(t-2b).$$

2 Vi bruker delvis integrasjon for å beregne b_1:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos 2x\,dx}_{0} = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

For $n \geq 2$ er $b_n = (-1)^n 2n/(n^2-1)$. Funksjonen $f(x)$ er en odde funksjon, da er Fourier-rekken til $f(x)$ en sinusrekke:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2n \sin nx}{n^2-1}\,, \qquad x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots\,.$$

Vi setter $x = 1$ i Fourierrekken til $f(x)$. Siden $f(1) = \cos 1$ får vi

$$\cos 1 = -\frac{1}{2}\sin 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2n\sin n}{n^2-1}, \quad \text{det gir} \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\Big[\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1\Big].$$

3 **a)** Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - FG\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 1 = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{aligned} &F'' - kF = 0 \\ &G'' - (k+1)G = 0. \end{aligned}$$

Randbetingelsene medfører $F'(0) = F'(1) = 0$, og vi må ha $k \leq 0$ for å få løsninger $F(x) \not\equiv 0$. For $k = 0$ får vi $F_0(x) = 1$, og for $k < 0$, $k = -p^2$, får vi $p = n\pi$ og $F_n(x) = \cos n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ligningen for $G(t)$ blir $G'' - G = 0$ når $k = 0$ og $G'' + (n^2\pi^2 - 1)G = 0$ når $k = -n^2\pi^2$. Det gir

$$\begin{aligned} G_0(t) &= A_0 e^t + B_0 e^{-t} \\ G_n(t) &= A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_0(t)$ kan også skrives $G_0(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$.) For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= F_0(x)G_0(t) \;= A_0 e^t + B_0 e^{-t} \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = \big(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\big)\cos n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

b) Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u(x,t) = (A_0 e^t + B_0 e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\big)\cos n\pi x$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$u_t(x,t) = (A_0 e^t - B_0 e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(-\omega_n A_n \sin\omega_n t + \omega_n B_n \cos\omega_n t\big)\cos n\pi x.$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed

(i) $$1 + \cos\pi x = u(x,0) = (A_0 + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x$$

(ii) $$0 = u_t(x,0) = (A_0 - B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \cos n\pi x.$$

Av (i) får vi $A_0 + B_0 = 1$, $A_1 = 1$ og $A_n = 0$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $A_0 - B_0 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 1$. Det gir $A_0 = B_0 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x,t) = \cosh t + \cos\omega_1 t \cos\pi x = \cosh t + \cos\left(\sqrt{\pi^2 - 1}\,t\right)\cos\pi x.$$

4 For $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$ får vi

$$\begin{aligned}\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-iwx}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 2e^{-iwx}\,dx = \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}}\Big[\Big[e^{-iwx}\Big]_0^1 + 2\Big[e^{-iwx}\Big]_1^2\Big] \\ &= \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}}\Big[\big(e^{-iw}-1\big) + 2\big(e^{-2iw}-e^{-iw}\big)\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,iw}\Big[1+e^{-iw}-2e^{-2iw}\Big].\end{aligned}$$

Vi bruker formelen for invers Fouriertransformasjon:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{-iw}-2e^{-2iw}}{\sqrt{2\pi}\,iw}e^{iwx}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixw}+e^{iw(x-1)}-2e^{iw(x-2)}}{w}\,dw.$$

Siden $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = \frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big]$ og $f(x)$ er kontinuerlig i det åpne intervallet $(1,2)$, får vi $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = f(x) = 2$ for $1 < x < 2$, og følgelig er

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixw}+e^{iw(x-1)}-2e^{iw(x-2)}}{w}\,dw = 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i \quad \text{for } 1 < x < 2.$$

Vi setter inn $x = 3/2$ og bruker Eulers formel ($e^{\pm it} = \cos t \pm i\sin t$):

$$\begin{aligned}4\pi i &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iw/2}+e^{iw/2}-2e^{-iw/2}}{w}\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos\frac{3}{2}w + i\sin\frac{3}{2}w) + (\cos\frac{1}{2}w + i\sin\frac{1}{2}w) - 2(\cos\frac{1}{2}w - i\sin\frac{1}{2}w)}{w}\,dw.\end{aligned}$$

Ved å ta imaginærdelen på begge sider av likhetstegnet ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{3}{2}w + 3\sin\frac{1}{2}w}{w}\,dw = 4\pi.$$

5 Funksjonen $u(x,y) = 3x^2 + ay^2 + e^{bx}\cos y$ er harmonisk hvis $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ved derivasjon får vi

$$u_{xx} + u_{yy} = (6 + b^2e^{bx}\cos y) + (2a - e^{bx}\cos y) = (6+2a) + (b^2-1)e^{bx}\cos y.$$

Altså må vi ha $a = -3$ og $b = 1$ og følgelig $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + e^x\cos y$.

Ifølge Cauchy–Riemannligningene må u og en konjugert harmonisk funksjon v oppfylle

$$(1)\quad v_y = u_x = 6x + e^x\cos y \qquad \text{og} \qquad (2)\quad v_x = -u_y = 6y + e^x\sin y.$$

Ved å integrere (1) mhp. y og derivere svaret mhp. x, får vi

$$(3)\quad v = 6xy + e^x\sin y + h(x) \qquad \text{og} \qquad (4)\quad v_x = 6y + e^x\sin y + h'(x)$$

der $h(x)$ er en vilkårlig funksjon av x. Sammenligner vi (2) og (4) ser vi at $h'(x) = 0$, dvs. $h(x) = C$ (konstant). Dermed får vi $v(x,y) = 6xy + e^x\sin y + C$.

6 Vi har

$$\frac{z}{z-i} = \frac{(z-i)+i}{z-i} = 1 + \frac{i}{z-i} \qquad \text{og følgelig} \qquad e^{z/(z-i)} = e\cdot e^{i/(z-i)}.$$

For å finne Laurentrekka til $f(z)$ i området $0 < |z-i| < \infty$, bruker vi Maclaurinrekka $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ (gyldig for alle z) med $i/(z-i)$ istedenfor z:

$$f(z) = e \cdot e^{i/(z-i)} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^n n!} = e + \frac{ei}{z-i} + \frac{ei^2}{(z-i)^2 2!} + \cdots, \quad z \neq i.$$

Av Laurentrekka ser vi at $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = ei$, dermed er

$$\oint_{|z-i|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot ei = -2\pi e.$$

$\boxed{7}$ **a)** Singulære punkter for $f(z) = (z+1)^2/\left[z(z^2+4z+1)\right]$ er $z_1 = 0$ (enkel pol) og $z_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-4 \pm \sqrt{16-4}\right) = -2 \pm \sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - 2$, $z_3 = -\sqrt{3} - 2$ (enkle poler).

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \to 0}[zf(z)] = \left[\frac{(z+1)^2}{z^2+4z+1}\right]_{z=0} = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{(z+1)^2}{[z(z^2+4z+1)]'}\right]_{z=z_2} = \frac{(z_2+1)^2}{z_2(2z_2+4)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-2)2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) = \left[\frac{(z+1)^2}{[z(z^2+4z+1)]'}\right]_{z=z_3} = \frac{(z_3+1)^2}{z_3(2z_3+4)} = \frac{(-\sqrt{3}-1)^2}{(-\sqrt{3}-2)(-2\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Vi setter $z = e^{i\theta}$. Da er $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ og $dz = e^{i\theta} i\,d\theta = iz\,d\theta$. Når θ varierer fra 0 til 2π vil z gjennomløpe enhetssirkelen C: $|z| = 1$ med positiv orientering. Av residuteoremet (bare z_1 og z_2 ligger innenfor C) får vi dermed

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{1+\frac{1}{2}(z+1/z)}{2+\frac{1}{2}(z+1/z)}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_C \frac{2z+z^2+1}{(4z+z^2+1)z}\,dz$$

$$= \frac{1}{i}\oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$