

Oppgavesettet har 11 punkter. Tab.c, 2, 3ab, 4, 5, 6, 7ab, som teller likt ved bedømmelsen.

- [1] a) Av $\mathcal{L}\{u(t-b)\} = (1/s)e^{-bs}$ følger ved skiftteorem 1 at

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}u(t-b)\} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

Vi kan også omforme $f(t)$ og bruke linearet og skiftteorem 2 for å finne $\mathcal{L}(f)$. Siden $e^{at} = e^{a(t-b+b)} = e^{ab}e^{a(t-b)}$ og $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$ får vi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{ab}\mathcal{L}\{e^{a(t-b)}u(t-b)\} = e^{ab} \cdot e^{-bs} \frac{1}{s-a} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

En tredje måte å finne $\mathcal{L}(f)$ på, er å regne ut integralet $\int_0^\infty e^{at}e^{-st} dt$.

- b) Vi Laplacetransformerer initialverdi problemet (ved å bruke resultatet i (a)) med $a = b = 1$ og løser den transformerte ligningen mhp. $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$\begin{aligned} (s^2Y - s) - 2(sY - 1) + Y &= \frac{e^{-(s-1)}}{s-1}, & (s-1)^2Y &= s-2 + \frac{e^{-(s-1)}}{s-1} \\ Y &= \frac{s-2}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} \\ &= \frac{(s-1)-1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3}. \end{aligned}$$

Vi har $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^{n+1})\} = t^n/n!$ og $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} / s^2\} = \frac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)$. Dermed får vi av skiftteorem 1 at

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^t[1-t + \frac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)] = e^t - te^t + \frac{1}{2}(t-1)^2e^t u(t-1).$$

- c) Fra a) har vi $\mathcal{L}(f) = e^{-b(s-a)} / (s-a)$. Av konvolusjonsteoremet følger

$$\mathcal{L}(f * f) = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a} \cdot \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a} = \frac{e^{-2bs}}{(s-a)^2} = e^{2ba} \cdot e^{-2bs} \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^2\} = te^{at}$, følger av skiftteorem 1 at

$$(f * f)(t) = e^{2ba} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2bs}}{(s-a)^2}\right\} = e^{2ba}(t-2b)e^{a(t-2b)}u(t-2b) = (t-2b)e^{at}u(t-2b).$$

- [2] Vi bruker delvis integrasjon for å beregne b_1 :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos x \sin x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos 2x dx = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

For $n \geq 2$ er $b_n = (-1)^n 2n / (n^2 - 1)$. Funksjonen $f(x)$ er en odder funksjon, da er Fourierrekken til $f(x)$ en sinusrekke:

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx = -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{2n \sin nx}{n^2 - 1}, \quad x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$$

Vi setter $x = 1$ i Fourierrekken til $f(x)$. Siden $f(1) = \cos 1$ får vi

$$\cos 1 = -\frac{1}{2} \sin 1 + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{2n \sin n}{n^2 - 1}, \quad \text{det gir } \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left[\cos 1 + \frac{1}{2} \sin 1 \right].$$

- [3] a) Vi søker inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - FG, \quad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 1 = k \text{ (konstant)}, \quad \frac{F''}{F} - kF = 0, \quad G'' - (k+1)G = 0.$$

Randbetingelsene medfører $F'(0) = F'(1) = 0$, og vi må ha $k \leq 0$ for å få løsninger $F(x) \neq 0$. For $k = 0$ får vi $F_0(x) = 1$, og for $k < 0$, $k = -p^2$, får vi $p = n\pi$ og $F_n(x) = \cos n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$

Ligningen for $G(t)$ blir $G'' - G = 0$ og $G' + (n^2\pi^2 - 1)G = 0$ når $k = -n^2\pi^2$. Det gir

$$G_0(t) = A_0e^t + B_0e^{-t} \\ G_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad \text{for } n = 1, 2, \dots$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_0(t)$ kan også skrives $G_0(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$). For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= F_0(x)G_0(t) = A_0e^t + B_0e^{-t} \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- b) Siden den gitte ligningen er linear og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgende

$$u(x,t) = (A_0e^t + B_0e^{-t}) + \sum_{n=1}^\infty (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos n\pi x$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 0, 1, 2, \dots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$u_t(x,t) = (A_0e^t - B_0e^{-t}) + \sum_{n=1}^\infty (-\omega_n A_n \sin \omega_n t + \omega_n B_n \cos \omega_n t) \cos n\pi x.$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 1 + \cos \pi x &= u(x,0) = (A_0 + B_0) + \sum_{n=1}^\infty A_n \cos n\pi x \\ \text{(ii)} \quad 0 &= u_t(x,0) = (A_0 - B_0) + \sum_{n=1}^\infty \omega_n B_n \cos n\pi x. \end{aligned}$$

Av (i) får vi $A_0 + B_0 = 1$, $A_1 = 1$ og $A_n = 0$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $A_0 - B_0 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 1$. Det gir $A_0 = B_0 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x,t) = \cosh t + \cos \omega_1 t \cos \pi x = \cosh t + \cos(\sqrt{\pi^2 - 1}t) \cos \pi x.$$

- 4 For $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$ får vi

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-iwx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 2e^{-iwx} dx = \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}} \left[e^{-iwx} \right]_0^1 + 2 \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}} \left[e^{-iwx} \right]_1^2 \\ &= \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}} \left[(e^{-iw} - 1) + 2(e^{-2iw} - e^{-iw}) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iw} \left[1 + e^{-iw} - 2e^{-2iw} \right].\end{aligned}$$

Vi bruker formelen for invers Fouriertransformasjon:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{-iw} - 2e^{-2iw}}{\sqrt{2\pi}} e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i w(x-1)} - 2e^{i w(x-2)}}{w} dw.$$

Siden $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ og $f(x)$ er kontinuert i det åpne intervallet (1, 2), får vi $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f(x) = 2$ for $1 < x < 2$, og følgende er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixw} + e^{i w(x-1)} - 2e^{i w(x-2)}}{w} dw = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i \quad \text{for } 1 < x < 2.$$

Vi setter inn $x = 3/2$ og bruker Eulers formel ($e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$):

$$\begin{aligned}4\pi i &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3iw/2} + e^{iw/2} - 2e^{-iw/2}}{w} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos \frac{3}{2}w + i \sin \frac{3}{2}w) + (\cos \frac{1}{2}w + i \sin \frac{1}{2}w) - 2(\cos \frac{1}{2}w - i \sin \frac{1}{2}w)}{w} dw.\end{aligned}$$

Ved å ta imaginærdelen på begge sider av likhetsteget ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{3}{2}w + 3 \sin \frac{1}{2}w}{w} dw = 4\pi.$$

- 5 Funksjonen $u(x, y) = 3x^2 + ay^2 + e^{bx} \cos y$ er harmonisk hvis $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ved derivasjon får vi

$$u_{xx} + u_{yy} = (6 + b^2 e^{bx} \cos y) + (2a - e^{bx} \cos y) = (6 + 2a) + (b^2 - 1)e^{bx} \cos y.$$

Altså må vi ha $a = -3$ og $b = 1$ og følgende $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y$.

Ifølge Cauchy-Riemannligningene må u og en konjugert harmonisk funksjon v oppfylle

$$(1) \quad v_y = u_x = 6x + e^x \cos y \quad \text{og} \quad (2) \quad v_x = -u_y = 6y + e^x \sin y.$$

Ved å integrere (1) mhp. y og derivere svaret mhp. x , får vi

$$(3) \quad v = 6xy + e^x \sin y + h(x) \quad \text{og} \quad (4) \quad v_x = 6y + e^x \sin y + h'(x)$$

der $h(x)$ er en vilkårlig funksjon av x . Sammenligner vi (2) og (4) ser vi at $h'(x) = 0$, dvs. $h(x) = C$ (konstant). Dermed får vi $v(x, y) = 6xy + e^x \sin y + C$.

- 6 Vi har

$$\frac{z}{z-i} = \frac{(z-i) + i}{z-i} = 1 + \frac{i}{z-i} \quad \text{og følgende} \quad e^{z/(z-i)} = e \cdot e^{i/(z-i)}.$$

For å finne Laurentrekka til $f(z)$ i området $0 < |z-i| < \infty$, bruker vi Maclaurinrekka $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ (gyldig for alle z) med $i/(z-i)$ istedenfor z :

$$f(z) = e \cdot e^{i/(z-i)} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^n n!} = e + \frac{ei}{z-i} + \frac{e^2 i^2}{(z-i)^2 2!} + \dots, \quad z \neq i.$$

Av Laurentrekka ser vi at $\text{Res}_{z=i} f(z) = ei$, dermed er

$$\oint_{|z-i|=1} f(z) dz = 2\pi i \cdot ei = -2\pi e.$$

- 7 a) Singulære punkter for $f(z) = (z+1)^2/[z(z^2+4z+1)]$ er $z_1 = 0$ (enkel pol) og $z_{2,3} = \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{16-4}) = -2 \pm \sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - 2$, $z_3 = -\sqrt{3} - 2$ (enkle poler).

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = \left[\frac{(z+1)^2}{z^2+4z+1} \right]_{z=0} = 1$$

$$\text{Res } f(z) = \left[\frac{(z+1)^2}{[z(z^2+4z+1)]'} \right]_{z=z_2} = \frac{(z_2+1)^2}{2z_2(2z_2+4)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-2)2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Res } f(z) = \left[\frac{(z+1)^2}{[z(z^2+4z+1)]'} \right]_{z=z_3} = \frac{(z_3+1)^2}{2z_3(2z_3+4)} = \frac{(-\sqrt{3}-1)^2}{(-\sqrt{3}-2)(-2\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Vi setter $z = e^{i\theta}$. Da er $\cos \theta = \frac{1}{2}(z+1/z)$ og $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$. Når θ varierer fra 0 til 2π vil z gjennomløpe enhets sirkelen $C: |z|=1$ med positiv orientering. Av residueteoremet (bare z_1 og z_2 ligger innefor C) får vi dermed

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta &= \oint_C \frac{1 + \frac{1}{2}(z+1/z)}{2 + \frac{1}{2}(z+1/z)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{2z + z^2 + 1}{4z + z^2 + 1} dz \\ &= \frac{1}{i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^2 \text{Res } f(z) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$