

Opgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3ab, 4, 5, 6ab og 7ab som teller likt ved bedømmelsen.

- 1 a) Fra tabellen i Rottmann har vi $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \Gamma(n+1)/(s-a)^{n+1} = n!/(s-a)^{n+1}$. Følgelig er $\mathcal{L}(te^{-t}) = 1/(s+1)^2$, $\mathcal{L}(e^{-t}) = 1/(s+1)$, $\mathcal{L}(t) = 1/s^2$, $\mathcal{L}(1) = 1/s$ og

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}(te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2s^2(s+1) + (s+1)^2 - 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}.\end{aligned}$$

Ved å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} = f(t-1)u(t-1) \\ &= ((t-1)e^{-(t-1)} + 2e^{-(t-1)} + (t-1) - 2)u(t-1) \\ &= (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1).\end{aligned}$$

- b) Vi har $r(t) = (t-1)u(t-1) = h(t-1)u(t-1)$ der $h(t) = t$. Ved skiftteorem 1 får vi da $\mathcal{L}\{r(t)\} = H(s)e^{-s} = (1/s^2)e^{-s}$, og den Laplacetransformerte av differensialligningen blir

$$[s^2Y - s + 1] + 2[sY - 1] + Y = \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Vi løser denne ligningen mhp. Y og inverstransformerer ved å bruke informasjon fra a):

$$\begin{aligned}(s^2 + 2s + 1)Y &= s + 1 + \frac{1}{s^2}e^{-s} \quad \text{dvs.} \quad (s+1)^2Y = (s+1) + \frac{1}{s^2}e^{-s} \\ Y &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)^2}e^{-s} = \frac{1}{s+1} + F(s)e^{-s} \\ y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t} + (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1) \\ &= \begin{cases} e^{-t} & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ (1 + e + et)e^{-t} + t - 3 & \text{for } t \geq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

- 2 Fra tabell har vi $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ og $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$. Det gir

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -\frac{d}{ds} [s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0).$$

Den Laplacetransformerte av den gitte differensialligningen blir da

$$[-2sY(s) - s^2Y'(s) + 1] + 2[sY(s) - 1] - Y'(s) = 0.$$

Ved forenkling følger

$$-(s^2 + 1)Y'(s) - 1 = 0 \quad \text{og dermed} \quad Y'(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Ved igjen å bruke regelen $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ får vi, siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2 + 1)\} = \sin t$,

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -Y'(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{som gir} \quad ty(t) = \sin t, \quad y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

- 3 a) For koeffisientene i cosinusrekka får vi

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_1^2 dx = \frac{1}{\pi} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_1^2 \cos nx dx = \frac{2 \sin nx}{\pi n} \Big|_1^2 = \frac{2 \sin 2n - \sin n}{\pi n}.\end{aligned}$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} \cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekka for vilkårlig x . For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ får vi

$$S(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

- b) Dersom $u(x, t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \quad \text{og} \quad G' - kG = 0$$

for en konstant k . Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikketrivie løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0, 1, 2, \dots$. For $G(t)$ får vi $G' + n^2G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2 t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x, t) = F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2 t} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ også en løsning, og d oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \cos nx$, og bestemmer koeffisientene A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $A_0 = 1$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1, 2, \dots$ og følgelig

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n - \sin n}{n} e^{-n^2 t} \cos nx.$$

- 4 De Fouriertransformerte av f og $f * f$ er

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) &= \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-e^{-iwx}}{iw} \right]_{-1}^1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w} \\ \mathcal{F}(f * f) &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{f}(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w} \right)^2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-2iw} - 2 + e^{2iw}}{w^2}.\end{aligned}$$

Ved å bruke formelen for invers Fouriertransformert får vi, siden $(f * f)(x)$ er kontinuert

$$(f * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{e^{2iw} - 2 + e^{-2iw}}{w^2} e^{iwx} dw.$$

Setter vi $x = 3$, får vi

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5iw} - 2e^{3iw} + e^{iw}}{w^2} dw = (f * f)(3) = 0$$

siden $(f * f)(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)f(3-p) dp = \int_{-1}^1 f(3-p) dp = \int_2^4 f(t) dt = 0$. Det søkte integralet er, siden $e^{iaw} = \cos aw + i \sin aw$, realdelen av integralet på venstresiden. Følgelig er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5w - 2 \cos 3w + \cos w}{w^2} dw = 0$$

- 5) Funksjonen $u(x, y) = e^{x+2} \sin(y+1)$ er harmonisk hvis $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ved derivasjon får vi

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{x+2} \sin(y+1) + e^{x+2}(-\sin(y+1)) = 0.$$

Ifølge Cauchy–Riemannligningene må u og v oppfylle

$$(1) \quad v_y = u_x = e^{x+2} \sin(y+1) \quad \text{og} \quad (2) \quad v_x = -u_y = -e^{x+2} \cos(y+1)$$

Ved å integrere (1) mhp. y og deretter derivere svaret mhp. x , får vi

$$(3) \quad v = -e^{x+2} \cos(y+1) + h(x) \quad \text{og} \quad (4) \quad v_x = -e^{x+2} \cos(y+1) + h'(x)$$

der $h(x)$ er en vilkårlig funksjon av x . Sammenligner vi (2) og (4) ser vi at $h'(x) = 0$, dvs. $h(x) = C$ (konstant). Dermed får vi $v(x, y) = -e^{x+2} \cos(y+1) + C$. Vi kan velge $C = 0$. For $f(z)$ får vi

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = e^{x+2} \sin(y+1) - ie^{x+2} \cos(y+1) \\ &= -ie^{x+2}(\cos(y+1) + i \sin(y+1)) = -ie^{(x+2)+i(y+1)} = -ie^{z+2+i}. \end{aligned}$$

- 6) a) For $z = 0$ er $f(z)$ analytisk ifølge oppgaveteksten. For $z \neq 0$ har $f(z) = z/(e^z - 1)$ singulære punkter når nevneren $e^z - 1 = 0$, altså for

$$z = \ln 1 = \ln |1| + i \arg 1 = 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Siden $(e^z - 1)' = e^z \neq 0$ er nullpunktene $z = z_k = 2k\pi i$ av første orden. Telleren z er ulik 0 når $z = z_k$ ($k \neq 0$). De singulære punktene $z = z_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) er følgelig enkle poler og residuene er

$$\text{Res } f(z) = \left. \frac{z}{(e^z - 1)'} \right|_{z=z_k} = \left. \frac{z}{e^z} \right|_{z=z_k} = \frac{z_k}{1} = 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

b) Konvergensraden R for Maclaurinrekke er avstanden fra 0 til nærmeste singulære punkt for $f(z)$ som er $\pm 2\pi i$, følgelig er $R = 2\pi$. Formelen for koeffisientene c_0, c_1, c_2, \dots finner vi ved å regne ut Cauchyproduktet av Maclaurinrekken til $f(z)$ og $e^z - 1$:

$$\begin{aligned} f(z)(e^z - 1) &= (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n + \dots) \cdot \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \right) \\ &= c_0 z + \left(\frac{c_0}{2!} + c_1 \right) z^2 + \left(\frac{c_0}{3!} + \frac{c_1}{2!} + c_2 \right) z^3 + \dots + \left(\frac{c_0}{n!} + \frac{c_1}{(n-1)!} + \dots + c_{n-1} \right) z^n + \dots \end{aligned}$$

Siden $f(z)(e^z - 1) = z$ følger

$$c_0 = 1 \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{(n-k)!} = 0 \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots$$

- 7) a) Funksjonen $f(z) = e^{iz}/(1+z^2)^2$ har singulære punkter der nevneren er 0. Det er når $z^2 = -1$, altså når $z = \pm i$. Nevnerens nullpunkter har orden 2, og siden telleren $e^{iz} \neq 0$ har $f(z)$ pol av orden 2 i punktene $z = \pm i$.

For residuet i punktet $z = i$ (dobbel pol) får vi

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2 e^{iz}}{[(z+i)(z-i)]^2} = \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right|_{z=i} \\ &= \left. \frac{(z+i)^2 e^{iz} i - 2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} \right|_{z=i} = \frac{(2i)^2 e^{-1} i - 4i e^{-1}}{(2i)^4} = \frac{-8i e^{-1}}{16} = -\frac{i}{2} e^{-1}. \end{aligned}$$

b) Vi kan anta $R > 1$ (siden vi skal la $R \rightarrow \infty$).

Vi har $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}| |e^{-y}| = e^{-y}$ og $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1$. På halvsirkelen Γ_R er $y \geq 0$ og $|z| = R$ og følgelig $|f(z)| \leq 1/(R^2 - 1)^2$ for alle $z \in \Gamma_R$. Ved å bruke ML -ulikheten får vi

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R \quad \text{og følgelig} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0.$$

La C_R være den positivt orienterte konturen som består av halvsirkelen Γ_R og det reelle intervallet $[-R, R]$ (se figuren). For $R > 1$ ligger polen $z = i$ innenfor konturen.

Av residueteoremet får vi

$$\oint_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{i}{2} e^{-1} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

På intervallet $[-R, R]$ er $z = x$, $dz = dx$. Følgelig er

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi}{e} \quad (\text{for } R > 1).$$

Grenseovergangen $R \rightarrow \infty$ og innsetting av $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(x^2+1)^2} dx + 0 = \frac{\pi}{e},$$

og ved å ta realdelen på begge sider får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

