Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Per Roar Andenæs
Telefon: 9 17 03

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Fredag 19. mai 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og utdelt kalkulator
Sensur: Fredag 9. juni 2000

Oppgave 1

Når en bakteriekultur utsettes for kraftig ultrafiolett stråling drepes bakteriene fordi strålingen ødelegger arvestoffet. Eksperimenter viser at antall bakterier avtar eksponentielt med lengden av strålingstiden. Vi finner ut at 75% av bakteriene lever etter 6 sekunders stråling. Hvor mange prosent er i live etter 30 sekunder? Hvor lenge må kulturen bestråles for å drepe 90% av bakteriene?

Oppgave 2

La funksjonen f være gitt ved formelen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

a) Hva er definisjonsmengden for denne funksjonen? Bestem eventuelle nullpunkter for f.

b) Regn ut $f'(x)$, og avgjør hvor f er voksende, hvor f er avtagende og finn eventuelle lokale ekstremalpunkter. Har f globalt/absolutt maksimum eller minimum? Begrunn svaret.

c) Regn ut $f''(x)$ og undersøk hvor grafen krummer oppover og hvor den krummer nedover. Har kurven noe vendepunkt?

d) Bestem alle asymptoter til f.

e) Skisser grafen til f ut fra punktene a) - d).

Oppgave 3

a) Regn ut de ubestemte integralene:

$$(i) \qquad \int xe^x dx \qquad\qquad (ii) \qquad \int (1+2t)^6 dt$$

b) Et kar fylles med vann med innstrømningshastighet:

$$V(t) = 3t^2\sqrt{1-t^3}, \quad 0 < t < 1,$$

angitt i liter pr. sekund. Finn det totale volum av vann som strømmer inn i perioden $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Oppgave 4

Finn alle komplekse løsninger av 2. gradsligningen:

$$z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$$

Angi løsningene både på formen $a + ib$ og på formen $re^{i\theta}$.

Oppgave 5

a) Benytt Gauss-Jordan-eliminasjon til å løse ligningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

b) Bestem ligningen for planet gjennom punktene:

$$P_1 = (1,1,0), \quad P_2 = (3,-2,3) \text{ og } P_3 = (2,2,1)$$

med minst mulig regning. Forklar framgangsmåten.

c) Hvordan kan man uten ytterligere regning konstatere at punktene P_1, P_2, P_3 i et punkt b) ikke kan ligge på en rett linje?

Oppgave 6

Italieneren Fibonacci tok i 1202 for seg følgende problem. Hvis man starter med et par nyfødte kaniner, vil disse etter 2 måneder produsere et nytt kaninpar, og deretter et nytt kaninpar hver måned. Dette gjelder også etterkommerne, og vi antar at ingen kaniner dør. Hvis vi ved a_n forstår antall kaninpar etter n måneder, er det lett å se at:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3$$

a) Angi a_4, a_5, a_6 og a_7 og forklar hvordan du kommer fram til disse tallene. Kontroller deretter at når $n = 1, 2, 3, 4, 5$ og 6, så gjelder:

$$(*) \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

b) Bevis at formelen $(*)$ i a) gjelder for alle $n \geq 1$.

c) Innfør betegnelsen

$$b_n = a_{n+1}/a_n,$$

og vis at

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$$

når $n \geq 1$. Bestem c når man går ut fra som kjent at $\lim_{n\to\infty} b_{n-1} = \lim_{n\to\infty} b_n = c \neq 0$.

d) Vi deler et linjestykke i to deler slik at forholdet mellom lengden av hele linjestykket og lengden av den største delen er lik forholdet mellom lengden av den største delen og lengden av den minste delen. Bestem dette forholdet.

e) Det forholdet vi finner i d) kalles det gyldne snitt. Har det resultatet man kommer fram i punkt c) noe med det gyldne snitt å gjøre? Gjør rede for denne sammenhengen.