MA0001 2004V. Løsningsskisse

1 (a) $f(x) = 4xe^{-x^2/2}$.

$f'(x) = 4e^{-x^2/2} + 4xe^{-x^2/2}\cdot(-x) = 4(1-x^2)e^{-x^2/2}$.

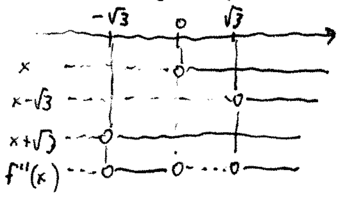
$f''(x) = 4(-2x)e^{-x^2/2} + 4(1-x^2)e^{-x^2/2}(-x) = 4(x^3-3x)e^{-x^2/2}$.

$f(x) < 0$ for $x<0$, $f(x) > 0$ for $x > 0$, $f(0) = 0$. Nullpunkt i 0.

$f'(x) = 4(1-x)(1+x)e^{-x^2/2} < 0$ for $x < -1$ og $x > 1$, $f'(x) > 0$ for $-1 < x < 1$, $f'(-1) = f'(1) = 0$.

Minimum i -1, maksimum i 1.

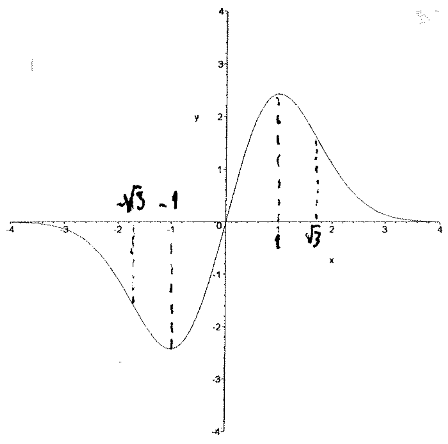
$f''(x) = 4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})e^{-x^2} < 0$ for $x < -\sqrt{3}$ og $0 < x < \sqrt{3}$, $f''(x) > 0$ for $-\sqrt{3} < x < 0$ og $x > 0$,



$f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$. Vendepunkter i $-\sqrt{3}$, 0 og $\sqrt{3}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{e^{x^2/2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{xe^{x^2/2}} = 0$ (l'Hôpitals regel).

(c) Også $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, dvs. min. og maks. fra (a) er absolutte.



(d) arealet $= \int_0^\infty 4xe^{-x^2/2}\,dx$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t 4xe^{-x^2/2}\,dx$ $\quad u = x^2/2$, $du = x\,dx$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^{t^2/2} 4e^{-u}\,du$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \left[-4e^{-u}\right]_0^{t^2/2}$

$= \lim\limits_{t\to\infty} (4 - 4e^{-t^2/2}) = 4$.

2 (a) $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$. Lineær approksimasjon: $P(x) = 0 + 4x = 4x$.

$f(0,1) \approx P(0,1) = 0,4$.

(b) Det fins z mellom 0 og x slik at $f(x) = 4x + \frac{f''(z)}{2}x^2 = 4x + 2z(z^2-3)e^{-z^2/2}x^2$, så det fins z mellom 0 og 0,1 slik at $f(0,1) = 0,4 + 0,02z(z^2-3)e^{-z^2/2}$. Feilen vi gjør ved å bruke 0,4 som tilnærming til $f(0,1)$ er altså $0,02z(z^2-3)e^{-z^2/2}$, der $0 < z < 0,1$. Da er $-3 < z^2 - 3 < -2,99$ og $0 < e^{-z^2/2} < 1$, slik at feilen må ligge mellom $0,02\cdot 0,1\cdot(-3)\cdot 1 = -0,006$ og 0.

[Med kalkulator, 5 desimaler: $f(0,1) = 0,39800$, dvs. feil $-0,002$.]