MA0002 2005H. Løsningsskisse

1a. $f_x = -2xe^{-x^2-3y^2}$, $f_y = -6ye^{-x^2-3y^2}$

b. $\nabla f = [f_x, f_y] = -2e^{-x^2-3y^2}[x, 3y]$. $\nabla f(1,1)$ peker i samme retning som $[-1,-3]$, som er retningen der dybden øker mest.

c. $f(x,y) = e^{-x^2-3y^2}$ er størst mulig når eksponenten $-x^2-3y^2$ er størst mulig. Denne er høyst 0, når $(x,y)=(0,0)$, og største dybde er $f(0,0) = e^0 = 1$ meter.
$(0,0)$ er eneste kritiske punkt, og vi undersøker langs veggene av akvariet:
Når $x = \pm 1$, er $f(\pm 1, y) = e^{-1-3y^2}$, som er minst mulig når $y = \pm 1$.
Dybden er da $e^{-4} \approx 0{,}018$ meter.
Når $y = \pm 1$, er $f(x, \pm 1) = e^{-x^2-3}$, som er minst mulig når $x = \pm 1$.
Minste dybde er altså 0,018 meter, i hjørnene av akvariet.

d. Langs sirkelen $y^2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2$ er dybden $e^{-x^2-3y^2} = e^{-x^2-3(\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2}))^2}$ $= e^{-x^2-3(x-x^2)} = e^{2x^2-3x}$, $0 \leq x \leq 1$, og denne er minst mulig når $2x^2-3x$ er minst mulig. Kritisk pkt. for $2x^2-3x$ er gitt ved $4x-3=0$, dvs. $x = 3/4$, som gir $2\cdot(\frac{3}{4})^2 - 3\cdot\frac{3}{4} = -\frac{9}{8}$, mens endepunktene 0 og 1 hhv. gir 0 og -1. Dvs. minste dybde $e^{-9/8} \approx 0{,}32$ m.
Da er $x = \frac{3}{4}$, slik at $y^2 = \frac{1}{4} - (\frac{3}{4}-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} \approx \pm 0{,}43$, og krabben er nærmest overflaten i $(\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}) \approx (0{,}75, \pm 0{,}43)$. [Lagranges metode kan også brukes.]

2a. $\det M = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-2 = 4$, $M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b. $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4$, $\lambda^2+5\lambda+4=0$, $\lambda = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2}$.

Egenverdier -4 og -1.
Egenvektor til -4: $(M-4I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} 2u+2v=0 \\ u+v=0 \end{matrix}$, $v=-u$. Velger $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
— " — -1: $(M-1I)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} -u+2v=0 \\ u-2v=0 \end{matrix}$, $u=2v$. Velger $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t}$, eller $\begin{matrix} x = c_1e^{-4t} + 2c_2e^{-t} \\ y = -c_1e^{-4t} + c_2e^{-t} \end{matrix}$

d. $t=0$ gir $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} c_1+2c_2=5 \\ -c_1+c_2=1 \end{matrix}$. Addisjon av likningene gir $3c_2=6$, $c_2=2$. Innsatt i 2. likn.: $c_1 = c_2-1 = 1$.
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t}$, eller $\begin{matrix} x = e^{-4t} + 4e^{-t} \\ y = -e^{-4t} + 2e^{-t} \end{matrix}$.