Myntkast og busstider

Myntkast og busstider

- Hypotesetesting med myntkast som eksempel – hvordan vite hvem som har jukset?

Myntkast og busstider

- Hypotesetesting med myntkast som eksempel – hvordan vite hvem som har jukset?
- Busstider – hvorfor vente lenger enn man skulle tro?

Myntkast

Myntkast

Dere har kastet en mynt 200 ganger og registrert hvert utfall.

Myntkast

Dere har kastet en mynt 200 ganger og registrert hvert utfall.
La

$$T = \text{totalt antall kast når man første gang oppnår } k \text{ mynt eller kron på rad.}$$

Myntkast

Dere har kastet en mynt 200 ganger og registrert hvert utfall.
La

$$T = \text{totalt antall kast når man første gang oppnår } k \text{ mynt eller kron på rad.}$$

På kast nummer T vil altså en rekke på k mynt eller k kron inntreffe for første gang siden man begynte å kaste mynten.

Myntkast

Dere har kastet en mynt 200 ganger og registrert hvert utfall.
La

$$T = \text{totalt antall kast når man første gang oppnår } k \text{ mynt eller kron på rad.}$$

På kast nummer T vil altså en rekke på k mynt eller k kron inntreffe for første gang siden man begynte å kaste mynten.

Eksempel:

Man prøver å kaste $k = 6$ kron/mynt på rad. Om man er heldig kan dette inntreffe etter $T = 6$ kast, men man trenger helst flere kast. Kanskje inntreffer det på $T = 50$ kast, eller kanskje til og med $T = 1000$?

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ & \\ & \end{cases}$$

Generelt kan man vise

$$P(T \le n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ & \end{cases}$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

$$P(T \leq 6) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0{,}0313$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

$$P(T \leq 6) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0{,}0313$$

$$P(T \leq 7) = P(T \leq 6) + \frac{1}{2^6}(1 - \underbrace{P(T \leq 1)}_{=0}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64} \approx 0{,}0469$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

$$P(T \leq 6) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0{,}0313$$

$$P(T \leq 7) = P(T \leq 6) + \frac{1}{2^6}(1 - \underbrace{P(T \leq 1)}_{=0}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64} \approx 0{,}0469$$

$$P(T \leq 8) = P(T \leq 7) + \frac{1}{2^6}(1 - P(T \leq 2)) = \frac{3}{64} + \frac{1}{64} = 0{,}0625$$

$$\vdots$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

$$P(T \leq 6) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0{,}0313$$

$$P(T \leq 7) = P(T \leq 6) + \frac{1}{2^6}(1 - \underbrace{P(T \leq 1)}_{=0}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64} \approx 0{,}0469$$

$$P(T \leq 8) = P(T \leq 7) + \frac{1}{2^6}(1 - P(T \leq 2)) = \frac{3}{64} + \frac{1}{64} = 0{,}0625$$

$$\vdots$$

$$P(T \leq 12) = P(T \leq 11) + \frac{1}{2^6}(1 - P(T \leq 6)) = \frac{7}{64} + \frac{1}{2^6}(1 - \frac{1}{32}) = 0{,}1245$$

$$\vdots$$

Generelt kan man vise

$$P(T \leq n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n < k \\ \frac{1}{2^{k-1}} & \text{hvis } n = k \\ P(T \leq n-1) + \frac{1}{2^k}(1 - P(T \leq n-k)) & \text{hvis } n > k \end{cases}$$

Eksempel:

La T være antall kast som trengs for å oppnå 6 mynt/kron på rad, $k = 6$.

$$P(T \leq 6) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0{,}0313$$

$$P(T \leq 7) = P(T \leq 6) + \frac{1}{2^6}(1 - \underbrace{P(T \leq 1)}_{=0}) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64} \approx 0{,}0469$$

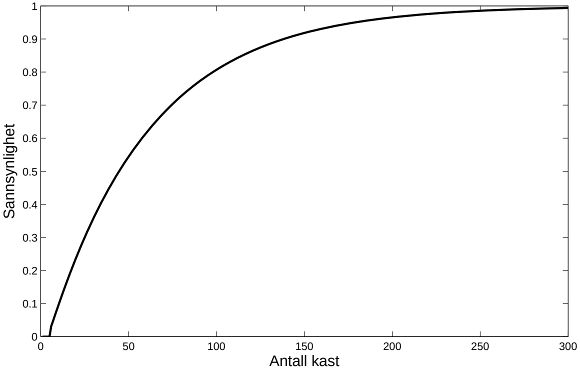
$$P(T \leq 8) = P(T \leq 7) + \frac{1}{2^6}(1 - P(T \leq 2)) = \frac{3}{64} + \frac{1}{64} = 0{,}0625$$

$$\vdots$$

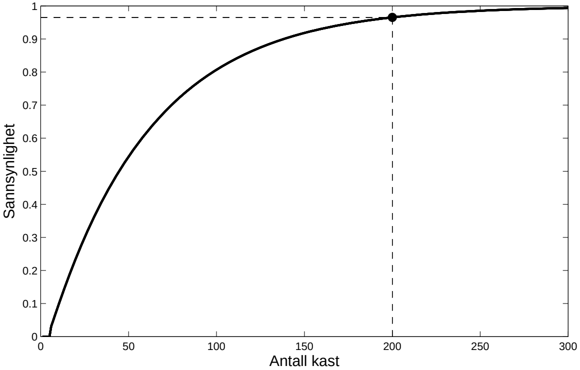
$$P(T \leq 12) = P(T \leq 11) + \frac{1}{2^6}(1 - P(T \leq 6)) = \frac{7}{64} + \frac{1}{2^6}(1 - \frac{1}{32}) = 0{,}1245$$

$$\vdots$$

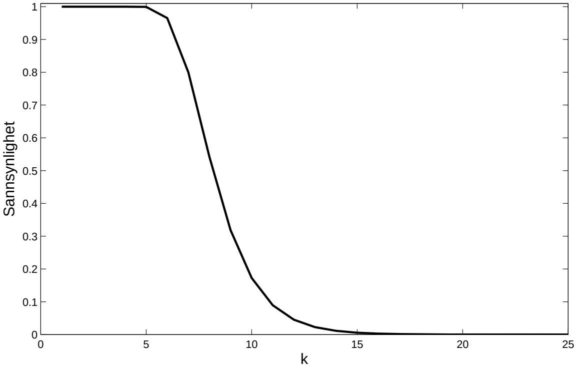
$$P(T \leq 200) \approx 0{,}9653$$



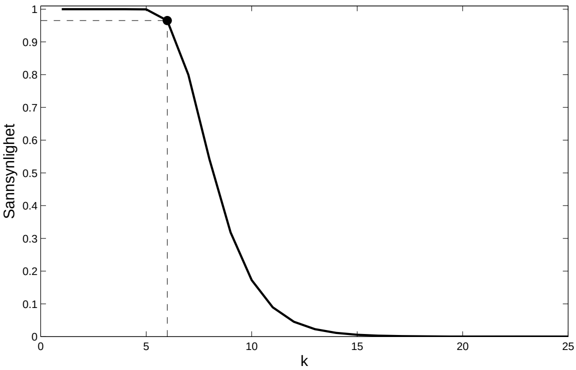
Sannsynligheten for å kaste $k = 6$ på rad som funksjon av antall kast.



Sannsynligheten for å kaste $k = 6$ på rad som funksjon av antall kast.



Sannsynligheten for å kaste k på rad på 200 kast som funksjon av k.



Sannsynligheten for å kaste k på rad på 200 kast som funksjon av k.

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.
Hypotesetest:

$$H_0: \text{du har ikke jukset}$$
$$H_1: \text{du har jukset}$$

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.
Hypotesetest:

$$H_0: \text{du har ikke jukset}$$
$$H_1: \text{du har jukset}$$

Bruker en testobservator X for å avgjøre om H_0 skal forkastes

$$X = \text{lengste sekvens av kron eller mynt}$$

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.
Hypotesetest:

$$H_0: \text{du har ikke jukset}$$
$$H_1: \text{du har jukset}$$

Bruker en testobservator X for å avgjøre om H_0 skal forkastes

$$X = \text{lengste sekvens av kron eller mynt}$$

Hvis H_0 er sann er $P(X \leq 5) \approx 1 - 0.965 = 0.035$, dvs lite sannsynlig.
Dermed forkaster vi H_0 til fordel for H_1 dersom $X \leq 5$.

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.
Hypotesetest:

$$H_0: \text{du har ikke jukset}$$
$$H_1: \text{du har jukset}$$

Bruker en testobservator X for å avgjøre om H_0 skal forkastes

$$X = \text{lengste sekvens av kron eller mynt}$$

Hvis H_0 er sann er $P(X \leq 5) \approx 1 - 0.965 = 0.035$, dvs lite sannsynlig.
Dermed forkaster vi H_0 til fordel for H_1 dersom $X \leq 5$.

- *Type I-feil*: Forkaste H_0 når denne er sann, sannsynlighet 0.035. Signifikansnivå 0.035.

Hypotesetesting – myntkast

Du er en skoleelev, og har fått i lekse å kaste en mynt 200 ganger, og skrive opp hvert utfall.
Læreren har mistanke om at du har funnet på utfallene uten å ta deg bryet med å kaste en mynt.
Hypotesetest:

$$H_0: \text{du har ikke jukset}$$
$$H_1: \text{du har jukset}$$

Bruker en testobservator X for å avgjøre om H_0 skal forkastes

$$X = \text{lengste sekvens av kron eller mynt}$$

Hvis H_0 er sann er $P(X \leq 5) \approx 1 - 0.965 = 0.035$, dvs lite sannsynlig.
Dermed forkaster vi H_0 til fordel for H_1 dersom $X \leq 5$.

- *Type I-feil*: Forkaste H_0 når denne er sann, sannsynlighet 0.035. Signifikansnivå 0.035.
- *Type II-feil*: Ikke forkaste H_0 dersom denne er feil.

Skjema for hypotesetesting:

	Du jukset ikke	Du jukset
Jeg tror ikke du jukser	*Korrekt*	***Type II-feil***
Jeg tror du jukser	***Type I-feil***	*Korrekt*

Busstider – intervall mellom ankomster

Vi ser på en bussrute som går hvert 10. min fra en holdeplass.

Busstider – intervall mellom ankomster

Vi ser på en bussrute som går hvert 10. min fra en holdeplass.
Gjennomsnittlig ventetid på 5 min.

Busstider – intervall mellom ankomster

Vi ser på en bussrute som går hvert 10. min fra en holdeplass.
Gjennomsnittlig ventetid på 5 min.
Hva skjer hvis de kommer i andre intervaller?
Dersom det går 6 busser i timen, blir ikke ventetiden 5 min i gjennomsnitt uansett?

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$E(T) \quad = \quad E[E(T \mid I)]$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \end{aligned}$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \\ &= E(T \mid I = 0) \cdot P(I = 0) + E(T \mid I = 1) \cdot P(I = 1) \end{aligned}$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \text{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \text{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \\ &= E(T \mid I = 0) \cdot P(I = 0) + E(T \mid I = 1) \cdot P(I = 1) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \\ &= E(T \mid I = 0) \cdot P(I = 0) + E(T \mid I = 1) \cdot P(I = 1) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{26}{5} = \textit{5 min 12 s} \end{aligned}$$

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \\ &= E(T \mid I = 0) \cdot P(I = 0) + E(T \mid I = 1) \cdot P(I = 1) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{26}{5} = 5 \textit{ min } 12 \textit{ s} \end{aligned}$$

b) *Dersom det går 2 busser hvert 20. min, er forventet ventetid*

Eksempel:

a) *Buss ankommer med tidsintervaller på 8-12-8-12 min. Vi lar*

$$I = \begin{cases} 0 & \textit{du ankommer i et 8 min-intervall} \\ 1 & \textit{du ankommer i et 12 min-intervall} \end{cases}$$

Definer T som tiden man må vente på bussen.

$$\begin{aligned} E(T) &= E[E(T \mid I)] \\ &= \sum_i E(T \mid I = i) \cdot P(T = i) \\ &= E(T \mid I = 0) \cdot P(I = 0) + E(T \mid I = 1) \cdot P(I = 1) \\ &= 4 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{26}{5} = \textit{5 min 12 s} \end{aligned}$$

b) *Dersom det går 2 busser hvert 20. min, er forventet ventetid 10 min.*

Hvis de ankommer som **Poisson-prosess** med intensitet 6 stk. pr time, er systemet «glemsk». Dvs.: Uansett hvor lenge du har ventet, så er forventet tid til neste buss 10 min.

Hvis de ankommer som **Poisson-prosess** med intensitet 6 stk. pr time, er systemet «glemsk». Dvs.: Uansett hvor lenge du har ventet, så er forventet tid til neste buss 10 min.

Andre eksempler som kan modelleres som en Poisson-prosess:

Hvis de ankommer som **Poisson-prosess** med intensitet 6 stk. pr time, er systemet «glemsk». Dvs.: Uansett hvor lenge du har ventet, så er forventet tid til neste buss 10 min.

Andre eksempler som kan modelleres som en Poisson-prosess:

- Antall telefonsamtaler som ankommer et sentralbord (tid til neste innringer uavhengig av når forrige innringer ringte)

Hvis de ankommer som **Poisson-prosess** med intensitet 6 stk. pr time, er systemet «glemsk». Dvs.: Uansett hvor lenge du har ventet, så er forventet tid til neste buss 10 min.

Andre eksempler som kan modelleres som en Poisson-prosess:

- Antall telefonsamtaler som ankommer et sentralbord (tid til neste innringer uavhengig av når forrige innringer ringte)

- Antall mål i en fotballkamp (når neste mål kommer uavhengig av tidligere kampforløp)