



*Bokmål*

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke  
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

## TMA4295 Statistisk inferens

Lørdag 17. desember 2011 kl. 9–13

Hjelpemidler: Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 17. januar 2012

I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

**Oppgave 1** La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige stokastiske variabler fra en poissonfordeling med parameter  $\lambda > 0$ , det vil si med sannsynlighetsmassefunksjon gitt ved  $f(x) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Vi vil undersøke noen punktestimatorer for  $P(X = 0) = e^{-\lambda}$  basert på  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

- Finne sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren  $\hat{\theta}$  for  $e^{-\lambda}$ .
- Vis at Cramér–Raos nedre skranke for variansen av en forventningsrett estimator for  $e^{-\lambda}$  er  $\lambda e^{-2\lambda} / n$ .

La  $U_i = 1$  hvis  $X_i = 0$  og  $U_i = 0$  ellers,  $1 \leq i \leq n$ . En annen estimator for  $e^{-\lambda}$ ,  $\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$ , blir foreslått.

- Finne den asymptotiske relative effisiensen (ARE) av  $\tilde{\theta}$  med hensyn på  $\hat{\theta}$ . Hvilken estimator foretrekker du?
- Vis at  $\sum_{i=1}^n X_i$  er en komplett suffisient observator for  $\lambda$ . Finn den betingede forventningsverdien  $E(U_1 | \sum_{i=1}^n X_i = m)$ , der  $m$  er et ikkenegativt heltall. Vis at den unike beste (som har uniformt minimal varians) forventningsrette estimatoren for  $e^{-\lambda}$  er  $\theta^* = (1 - 1/n)^{n\bar{X}}$ .
- Finne den eksakte variansen til  $\hat{\theta}$  og til  $\theta^*$ , og regn ut numeriske verdier av variansene når  $n = 20$  og  $\lambda = 1$ . (Vink: Bruk momentgenererende funksjon til  $\bar{X}$ .) Er  $\hat{\theta}$  forventningsrett?

**Oppgave 2** La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige stokastiske variabler fra en fordeling som har sannsynlighetstetthetsfunksjon gitt ved  $f(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}$  for  $x > 0$  og  $f(x) = 0$  ellers, der  $\theta > 0$  er en parameter.

- Vis at  $2\theta X_1^2$  er khikvadratfordelt med 2 frihetsgrader.
- Bruk den eksakte fordelingen til  $2\theta \sum_{i=1}^n X_i^2$  for å finne et  $1 - \alpha$ -konfidensintervall for  $\theta$ .

I resten av oppgavesettet vil vi teste  $H_0: \theta = \theta_0$  mot alternativet  $H_1: \theta \neq \theta_0$ . Anta  $n = 50$  og teststørrelse  $\alpha = 0.05$ .

- Finne en test basert på den eksakte fordelingen under  $H_0$  av  $2\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i^2$ . For hvilke  $\theta_0 \sum X_i^2$  vil  $H_0$  forkastes?
- Finne en test basert på en tilnærmet fordeling under  $H_0$  av  $\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i^2 / n$  ifølge sentralgrenseteoremet. For hvilke  $\theta_0 \sum X_i^2$  vil  $H_0$  forkastes?
- Finne en test basert på en tilnærmet fordeling under  $H_0$  av sannsynlighetskvotetestobservatoren. For hvilke  $\theta_0 \sum X_i^2$  vil  $H_0$  forkastes? (Du kan bruke at  $t - 50 \ln t = -143,7$  for  $t = 37,39$  og for  $t = 65,17$ .)