Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
73 59 81 26

Eksamen i MNF ST 102, *Sannsynlighet og statistikk II*

Fredag 3. desember 1999
Kl. 9–15

Tillatte hjelpemidler: 4 sider notater,
Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*,
instituttets kalkulator

Sensurdato: 23. desember 1999

Oppgave 1 La (X, Y) ha simultantetthet f definert ved at $f(x,y) = \frac{ky}{(1+x)^4} e^{-y/(1+x)}$ for $x, y \geq 0$, der k er en konstant. La $U = Y/(1+X)$ og $V = 1/(1+X)$.

a) Vis at (U, V) har simultantetthet g definert ved at $g(u,v) = kue^{-u}$ for u, v slik at $g(u,v) > 0$. For hvilke u, v er $g(u,v) > 0$?

b) Bestem k. Er U og V uavhengige?

Oppgave 2 (I denne oppgaven kan mange punkter besvares uten at alle foregående punkter er besvart.)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige variabler, hver med sannsynlighetstetthet f definert ved at $f(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ for alle $x \in [0,1]$, der α er en positiv parameter.

a) Finn momentestimatoren for α.

b) Vis at α har sannsynlighetsmaksimeringsestimator $\hat{\alpha} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$.

c) Er $\hat{\alpha}$ suffisient for α?

d) Hvilken fordeling har $-\ln X_i$? Enn $-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$?

e) Finn forventningsverdien og variansen til $\hat{\alpha}$.

f) Finn en nedre skranke for variansen til en forventningsrett estimator for α. Sammelikn med foregående punkt.

Oppgave 3 Møll ble fanget i 11 feller av type I og i 8 feller av type II. Antallene som ble fanget var:

Felle av type I:	41	34	33	36	40	25	31	37	34	30	38
Felle av type II:	52	57	62	55	64	57	56	55			

a) Vi ønsker å undersøke om dataene tyder på at det er forskjell mellom de to felletypene i variasjon i antall møll fanget. Formuler dette som en hypotesetest basert på utvalgsvariansene til antallene møll fanget i hver felle. Hvilke forutsetninger ligger til grunn for testen? Kommenter kort om forutsetningene er oppfylt i dette tilfellet?

b) Det oppgis at utvalgsvariansene til antallene møll fanget er 21,87 og 15,36 for henholdsvis felle av type I og av type II. Hva blir konklusjonen på testen hvis vi velger signifikansnivå 0,05?

c) La U og V være uavhengige χ^2-fordelte variabler med henhldsvis m og n frihetsgrader. Konstruer en F-fordelt variabel ved hjelp av U og V. Hva svarer til U og V i testobservatoren i denne testen?

Oppgave 4 I en fabrikk er det dag-, kvelds- og nattskift. En ønsket å undersøke om det er noen avhengighet mellom skift en artikkel blir produsert i og om artikkelen er defekt. En samlet følgende data (tallene er antall artikler i hver kombinasjon av klasser):

	Skift		
	Dag	Kveld	Natt
Defekte	45	55	70
Ikkedefekte	905	890	870

Utfør en test på 0,025-nivå og på 0,05-nivå for å undersøke om det er avhengighet eller ikke.

UNF ST 102 høst 1999 – løsningsskisse

Små rettelser 8.12.1999

1. (a) $u = \frac{y}{1+x}$, $v = \frac{1}{1+x}$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{u}{v}$, $x = \frac{1}{v} - 1$

jacobideterminant: $J = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{v} \\ -\frac{1}{v^2} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}$

$g(u,v) = f(x,y)|J| = f(\frac{1}{v}-1, \frac{u}{v}) \cdot \frac{1}{v^3} = \frac{ku/v}{1/v^4} e^{-\frac{u/v}{1/v}} \frac{1}{v^3} = kue^{-u}$

$x \geq 0$, $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 < v \leq 1$, $u \geq 0$.

$$g(u,v) = \begin{cases} kue^{-u}, & u>0,\ 0<v<1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(b) $1 = \int_0^1 \int_0^\infty kue^{-u} du\, dv = \int_0^\infty kue^{-u} du = k\left([-ue^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u} du\right) = k[-e^{-u}]_0^\infty = k$, så $k=1$.

[Evt.: Bruk at $\int_0^\infty ue^{-u} du = \Gamma(2) = 1$.]

g er simultantettheten til to uavh. variabler som hhv. har tetthet ue^{-u}, $u>0$, og er uniformt fordelt. Så U, V er uavhengige.

2 (a) $EX_i = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 x^{1/\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+1/\alpha} [x^{1/\alpha + 1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$.

La α^* være momentestimatoren. $\bar{X} = \frac{1}{\alpha^*+1}$, dvs. $\alpha^* = \frac{1}{\bar{X}} - 1$.

(b) $L(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n}\prod x_i^{1/\alpha - 1}$, $\ln L(\alpha) = -n\ln\alpha + (1/\alpha - 1)\sum \ln x_i$,

$\frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\sum \ln x_i$, $n\hat{\alpha} = -\sum \ln X_i$, $\hat{\alpha} = -\frac{1}{n}\sum \ln X_i = -\overline{\ln X}$.

(c) $L(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n}\prod x_i^{1/\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha^n}(\prod x_i)^{1/\alpha - 1}$, og $\prod X_i$ er suffisient iflg. faktoriseringssetningen. Dermed er $\hat{\alpha} = -\frac{1}{n}\sum \ln X_i = -\frac{1}{n}\ln(\prod X_i)$ suffisient for α.

(d) La $Y = -\ln X_i$, dvs. $X_i = e^{-Y}$. $P(Y \leq y) = P(-\ln X_i \leq y) = P(\ln X_i \geq -y)$
$= P(X_i \geq e^{-y}) = 1 - P(X_i < e^{-y})$, $f_Y(y) = f(e^{-y}) \cdot \frac{de^{-y}}{dy} = -\frac{1}{\alpha}(e^{-y})^{1/\alpha - 1}(-e^{-y})$
$= \frac{1}{\alpha}e^{-y/\alpha}$, $y>0$. Så $-\ln X_i$ er eksponentielt fordelt med forventningsverdi α. $-\sum \ln X_i$ er gammafordelt $(n, 1/\alpha)$.

(e) $E\hat{\alpha} = E(-\frac{1}{n}\sum \ln X_i) = \frac{1}{n} \cdot n E(-\ln X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \alpha = \alpha$,

$\text{Var}\,\hat{\alpha} = \text{Var}(-\frac{1}{n}\sum \ln X_i) = \frac{1}{n^2} n \text{Var}(-\ln X_i) = \frac{\alpha^2}{n}$.

(f) $\ln f(x) = -\ln\alpha + (1/\alpha - 1)\ln x$, $\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\ln x$, $\frac{\partial^2 \ln f(x)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\ln x$,

$E\frac{\partial^2 \ln f(X)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}E(-\ln X) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\alpha = -\frac{1}{\alpha^2}$

Cramer-Raos skranke: $(nE\frac{\partial^2 \ln f(X)}{\partial \alpha^2})^{-1} = \alpha^2/n$.

$\hat{\alpha}$ er forventningsrett, og har altså minimal varians.

3 (a) Anta at antallene i de to fellene er uavh. og hhv. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Antallene kan ikke være eksakt normalfordelte, da de er positive og heltallige.

(b) Testobservator $\frac{21,87}{15,36} = 1,42$. $F_{0,975, 10, 7} = 4,76$ $\left(F_{0,025, 10, 7} = 1/F_{0,975, 7, 10} = \frac{1}{3,95} < 1\right)$.

Forkaster ikke H_0.

(c) $\frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}$. Her: $U = \frac{10 S_1^2}{\sigma_1^2}$, $V = \frac{7 S_2^2}{\sigma_2^2}$, der S_i^2 er utvalgsvariansene.

4. Kontingenstabell (forv. i parentes):

				Sum
	45 (57,0)	55 (56,7)	70 (56,3)	170
	905 (893,0)	890 (888,3)	870 (883,7)	2665
Sum	950	945	940	2835

Eks.: $\frac{170 \cdot 950}{2835} = 57,0$

$X^2 = \frac{(45-57,0)^2}{57,0} + \dots + \frac{(870-883,7)^2}{883,7} = 6,29$, mens $\chi^2_{2, 0,975} = 7,38$, $\chi^2_{2, 0,950} = 5,99$.

Forkaster nullhyp. om uavh. på 0,05-nivå men ikke på 0,025-nivå.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
73 59 81 26

Eksamen i MNF ST 102, *Sannsynlighet og statistikk II*
Tirsdag 11. mai 1999
Kl. 9–15

Tillatte hjelpemidler: 4 sider notater,
Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*,
instituttets kalkulator

Sensurdato: 1. juni 1999

Oppgave 1 En ønsker å anslå barns volum på grunnlag av deres vekt. En har målt vekt x_i (i kg) og volum y_i (i l) på 18 barn:

x_i	17,1	10,5	13,8	15,7	11,9	10,4	15,0	16,0	17,8
y_i	16,7	10,4	13,5	15,7	11,6	10,2	14,5	15,8	17,6

x_i	15,8	15,1	12,1	18,4	17,1	16,7	16,5	15,1	15,1
y_i	15,2	14,8	11,9	18,3	16,7	16,6	15,9	15,1	14,5

Anta at y_i er realiseringer av uavhengige normalfordelte variabler med forventningsverdi $a+bx_i$ og varians σ^2, $1 \le i \le 18$.

Det oppgis at $\sum x_i = 270{,}1$, $\sum y_i = 265{,}0$, $\sum x_i^2 = 4149{,}39$, $\sum y_i^2 = 3996{,}14$ og $\sum x_i y_i = 4071{,}71$.

a) Estimer a og b. Skisser dataene og regresjonslinja.

Det oppgis at $n\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{12}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = 0{,}651240$, der $\hat{a}$ og $\hat{b}$ er estimatene av henholdsvis a og b.

b) Finn et 95 %-konfidensintervall for forventet volum av et barn som veier 14,0 kg.

c) Finn et 95 %-prediksjonsintervall for volumet av et barn som veier 14,0 kg.

d) Forklar kort hva et konfidensintervall og et prediksjonsintervall er, og hvorfor prediksjonsintervallet er videre enn konfidensintervallet.

Oppgave 2 Et forsøk ble gjort for å undersøke om deltakelse i organisert idrett medfører mindre deltakelse i idrettsaktiviteter satt i gang på egen hånd. 77 barn ble spurt om de deltar i organisert idrett og om hvor ofte de deltar i idrettsaktiviteter satt i gang på egen hånd. Antall i de forskjellige kategoriene var slik:

Hyppighet av deltakelse i aktiviteter satt i gang på egen hånd	Organisert idrett: Deltar	Organisert idrett: Deltar ikke
Mindre enn én gang i uka	4	16
1–6 dager i uka	15	20
Hver dag	7	15

Gir datamaterialet grunnlag for å si at hyppigheten av aktiviteter satt i gang på egen hånd er avhengig av deltakelse eller ikke i organisert idrett? Utfør en test på 0,05-nivå.

Oppgave 3 (I denne oppgaven kan mange punkter besvares uten at alle foregående punkter er besvart.)

a) La U være uniformt fordelt på enhetsintervallet $(0,1]$. La θ og α være positive parametre. Vis at $X = \theta U^{1/\alpha}$ har sannsynlighetstetthet f gitt ved

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1} \qquad \text{for } 0 < x \le \theta$$

(og $f(x) = 0$ for andre x).

b) Vis at

$$EX = \frac{\alpha}{\alpha+1}\theta \qquad \text{og at} \qquad \operatorname{Var} X = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}\theta^2.$$

c) Gitt uavhengige observasjoner $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sannsynlighetstetthet f. Vis at momentestimatorene for α og θ er henholdsvis

$$\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{1-\overline{X}^2/\overline{X^2}}} - 1 \qquad \text{og} \qquad \theta^* = \left(1+\frac{1}{\alpha^*}\right)\overline{X} = \frac{\overline{X}}{1-\sqrt{1-\overline{X}^2/\overline{X^2}}}.$$

d) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene for θ og α er henholdsvis

$$\hat{\theta} = \max_i X_i = X_{\max} \qquad \text{og} \qquad \hat{\alpha} = \frac{1}{\ln X_{\max} - \overline{\ln X}}.$$

Anta i resten av oppgaven at α er kjent, og at $\theta^* = (1 + 1/\alpha)\overline{X}$ og $\hat{\theta} = X_{\max}$.

e) Vis at $\hat{\theta}$ har sannsynlighetstetthet g gitt ved

$$g(x) = \frac{n\alpha}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n\alpha - 1} \qquad \text{for } 0 < x \leq \theta.$$

f) Finn $\operatorname{Var}\hat{\theta}$ (vink: bruk (b)) og $\operatorname{Var}\theta^*$.

g) Vis at θ^* er forventningsrett og finn en forventningsrett estimator $\tilde{\theta}$ på grunnlag av $\hat{\theta}$.

h) Finn $\operatorname{Var}\tilde{\theta}$. Hvilken av estimatorene θ^* og $\tilde{\theta}$ ville du foretrekke? Begrunn svaret.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
73 59 81 26

Eksamen i MNF ST 102, *Sannsynlighet og statistikk II*

Fredag 4. desember 1998
Kl. 9-15

Tillatte hjelpemidler: 4 sider notater,
Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*,
instituttets kalkulator

Sensurdato: 23. desember 1998

Oppgave 1 Et forsøk ble gjort for å undersøke virkningen av tilsetning av fosfor i jord på innholdet av uorganisk fosfor i planter. En målte følgende innhold y_i av uorganisk fosfor (målt i mikromol pr. gram av rota til hver plante) for forskjellige fosformengder x_i i jorda (målt i mikromol):

x_i	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1
y_i	204	195	247	245	159	127	95	144	128	192	84	71

Anta at fosforinnholdene y_i i plantene er realiseringer av uavhengige normalfordelte variabler med forventningsverdi $a + bx_i$ og varians σ^2.

Det oppgis at $\sum_{i=1}^{12} x_i = 3{,}4$, $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 1{,}29$, $\sum_{i=1}^{12} y_i = 1891$, $\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 337191$ og $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 624{,}25$.

a) Estimer a og b.

Det oppgis at $n\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{12}(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = 15242{,}7$, der $\hat{a}$ og $\hat{b}$ er estimatene av henholdsvis a og b.

b) Test nullhypotesen $b = 0$ mot alternativet $b \neq 0$ på 0,05-nivå.

95%

c) Finn et konfidensintervall og et prediksjonsintervall for forventet innhold av uorganisk fosfor i en plante gitt at fosformengden i jorda er 0,20.

d) Forklar kort hva et konfidensintervall og et prediksjonsintervall er, og hvorfor prediksjonsintervallet er videre enn konfidensintervallet.

Oppgave 2 Et forsøk ble gjort for å undersøke om deltakelse i organisert idrett medfører mindre deltakelse i idrettsaktiviteter satt i gang på egen hånd. 77 barn ble spurt om de deltar i organisert idrett og om hvor ofte de deltar i idrettsaktiviteter satt i gang på egen hånd. Antall i de forskjellige kategoriene var slik:

Hyppighet av deltakelse i aktiviteter satt i gang på egen hånd	Organisert idrett	
	Deltar	Deltar ikke
Mindre enn én gang i uka	4	16
1-6 dager i uka	15	20
Hver dag	7	15

Gir datamaterialet grunnlag for å si at hyppigheten av aktiviteter satt i gang på egen hånd er avhengig av deltakelse eller ikke i organisert idrett? Utfør en test på 0,05-nivå.

Oppgave 3 (I denne oppgaven kan mange punkter besvares uten at alle foregående punkter er besvart.)

a) Anta at $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ er uavhengige standard normalfordelte variabler. La

$$X = \alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m} Z_j^2}, \qquad \text{der } \alpha > 0.$$

Vis at X har sannsynlighetstetthet f_X gitt ved at

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma(m/2)\alpha^m} x^{m-1} e^{-x^2/(2\alpha^2)}, \qquad x > 0$$

b) Vis at

$$EX = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma((m+1)/2)}{\Gamma(m/2)}\alpha \qquad \text{og at} \qquad EX^2 = \frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(m/2)}\alpha^2.$$

c) La $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n}$ være uavhengige standard normalfordelte variabler. La

$$Y_1 = \beta\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad Y_2 = \beta\sqrt{Z_3^2 + Z_4^2}, \quad \ldots, \quad Y_n = \beta\sqrt{Z_{2n-1}^2 + Z_{2n}^2}.$$

Hva er sannsynlighetstettheten for Y_i? Finn EY_i og EY_i^2.

d) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β er

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}$$

og at momentestimatoren for β er

$$\beta^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{Y}.$$

e) Finn forventningsverdi og varians av $\hat{\beta}$ og β^*. (Vink: Skriv $\hat{\beta}$ på form som X i punkt (a).)

f) Finn forventningsrette estimatorer $\hat{\hat{\beta}}$ og β^{**} på grunnlag av henholdsvis $\hat{\beta}$ og β^*. Finn variansene til $\hat{\hat{\beta}}$ og β^{**}.

g) Finn Cramer–Rao-skranken for forventningsrette estimatorer av β.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
73 59 81 26

Eksamen i S 102, *Sannsynlighet og statistikk II*

Fredag 5. desember 1997
Kl. 9-15

Tillatte hjelpemidler: 4 sider notater,
Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*,
instituttets kalkulator

Sensurdato: 23. desember 1997

Oppgave 1

(I denne oppgaven kan mange punkter besvares uten at alle foregående punkter er besvart.)

Anta at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige variabler med sannsynlighetstetthet f_X gitt ved at $f_X(x) = \theta/(1+x)^{\theta+1}$ for $x \geq 0$ og $f_X(x) = 0$ ellers, der parameteren $\theta > 1$.

a) Finn momentestimatoren for θ.

b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (MLE) for θ er $\hat{\theta} = n/\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$.

c) Er $\hat{\theta}$ suffisient for θ?

d) Vis at $Y = \ln(1+X_i)$ er eksponentielt fordelt med forventningsverdi $1/\theta$, dvs. at Y har sannsynlighetstetthet f_Y gitt ved at $f_Y(y) = \theta e^{-\theta y}$ for $y \geq 0$ og $f_Y(y) = 0$ ellers.

e) Forklar hvorfor $Z = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$ er gammafordelt med parametre n og θ, dvs. at Z har sannsynlighetstetthet f_Z gitt ved at $f_Z(z) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\theta z}$ for $z \geq 0$ og $f_Z(z) = 0$ ellers.

f) Vis at $\hat{\theta}$ har sannsynlighetstetthet $f_{\hat{\theta}}$ gitt ved at $f_{\hat{\theta}}(t) = \frac{n^n \theta^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{t^{n+1}} e^{-n\theta/t}$ for $t > 0$ og $f_{\hat{\theta}}(t) = 0$ ellers.

g) Vis at $E\hat{\theta} = n\theta/(n-1)$ og at $\operatorname{Var}\hat{\theta} = n^2\theta^2/((n-1)^2(n-2))$.

h) Finn en forventningsrett estimator θ^* for θ og bestem $\operatorname{Var}\theta^*$.

i) Finn effisiensen til θ^*.

Oppgave 2

Gitt følgende observasjoner av uavhengige identisk fordelte variabler:

1,75	6,44	5,70	4,13	8,66	7,99	7,43	3,90	3,69	3,63
6,26	7,54	5,99	5,55	5,05	6,78	4,79	7,62	2,01	8,28

a) Test om variablene er normalfordelte ved en modelltilpasningstest (khikvadrattest). Bruk signifikansnivå 0,05. Det oppgis at summen av observasjonene er 113,2 og at summen av kvadratene av observasjonene er 717,7. (Vink: Del tallinja inn i 4 klasser, slik at sannsynligheten er 1/4 for at en normalfordelt variabel med parametre lik sannsynlighetsmaksimeringsestimatene fra datasettet ligger i hver klasse. Det oppgis at sannsynligheten for at en standard normalfordelt variabel er større enn 0,674 er 1/4.)

Et annet datasett bestående av observasjoner av uavhengige identisk fordelte variabler er:

10,88	8,92	6,17	7,17	5,14	8,24	5,85	13,49	10,99	10,54

I dette datasettet er summen av observasjonene 87,4 og summen av kvadratene av observasjonene 829,8. Anta at datasettene er uavhengig av hverandre, og at de består av observasjoner fra to normalfordelinger.

b) Test om variansene i de to normalfordelingene er like mot alternativet at de er forskjellige. Bruk signifikansnivå 0,05. (Merk at nedre 0,025-kvantil for en F-fordeling med (r,s) frihetsgrader er lik én delt på øvre 0,025-kvantil for en F-fordeling med (s,r) frihetsgrader.)

c) Test om forventningsverdiene i de to normalfordelingene er like mot alternativet at de er forskjellige. Bruk signifikansnivå 0,05.

Oppgave 3

La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observasjoner av uavhengige variabler fra en uniform fordeling på $(0, \theta)$.

a) Finn likelihood-funksjonen for θ gitt observasjonene.

Vi skal teste $H_0: \theta = 2$ mot alternativet $H_1: \theta > 2$.

b) Finn maksimum av likelihood-funksjonen (i) når $\theta = 2$ og (ii) når $\theta \geq 2$.

c) Formuler sannsynlighetskvotetesten. Kommenter resultatet.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Gunnar Taraldsen
73 59 14 54

S 102 SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK II

Tirsdag 13. mai 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: 4 håndskrevne A4 sider; Godkjent lommekalkulator
Statistiske tabeller og formler (Tapir); Matematisk formelsamling (Tapir)
Sensurfrist: Tirsdag 3.juni 1997

Oppgave 1

La sannsynlighetstettheten $f_{X,Y}$ til X, Y være gitt ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+2y) & \text{når } 0 < y < 1 \text{ og } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Bestem konstanten c og marginaltettheten f_X til X. Finn sannsynlighetstettheten f_Z til $Z = 9/(X+1)^2$.

Oppgave 2

La X og Y være uavhengige og eksponensialfordelte variable med parameter λ. La $Z = X - Y$ og $W = Y$. La $f_{Z,W}$ betegne simultantettheten til Z, W. Illustrer på en figur hvor sannsynlighetstettheten $f_{Z,W} > 0$. Finn $f_{Z,W}$ og f_Z.

Oppgave 3

La $X_1, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra en normalfordeling $N(\mu_X, \sigma^2)$ og la $Y_1, \ldots, Y_m$ være et uavhengig tilfeldig utvalg fra en normalfordeling $N(\mu_Y, \sigma^2)$.

a) Vis at rimelighetsestimatene ("Maximum-Likelihood estimator") for parametervektoren (μ_X, μ_Y, σ^2) er gitt ved

$$\hat{\mu}_X = \bar{x},\ \hat{\mu}_Y = \bar{y},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)s_X{}^2 + (m-1)s_Y{}^2}{n+m}$$

Er de tilsvarende rimelighetsestimatorer forventningsrette?

b) Vi vil teste hypotesen $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ mot alternativet $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$. Formuler rimelighetskvotetesten ("generalized-likelihood-ratio test"). Hvordan bestemmes forkastningsområdet og hva betyr det at testen har signifikansnivå α?

Vis at testen kan baseres på variabelen

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{1/n + 1/m}}$$

hvor $S_p^2 = [(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2]/[n+m-2]$.

c) Hvis at under H_0 er T Student t-fordelt med $n+m-2$ frihetsgrader.

d) Det har blitt tatt prøver av treverket i den indre og den ytre delen av en viss bysantinsk kirke. Prøvene har blitt analysert og dette ga følgende dateringer.

Indre: 1294, 1279, 1274, 1264, 1263, 1254, 1251, 1251, 1248, 1240, 1232, 1220, 1218, 1210.
Ytre: 1284, 1272, 1256, 1254, 1242, 1274, 1264, 1256, 1250.

Bruk overnevnte to-utvalgs t-test med signifikansnivå $\alpha = 5\%$ for å avgjøre om den indre og ytre delen av kirken har samme alder. For å lette regnearbeidet oppgis det at dateringene gir $s_p^2 = 433,13$.

Oppgave 4

I denne oppgaven skal dateringene i foregående oppgave analyseres uten antagelsen om normalitet. Det antas at dateringene fra den ytre delen er et tilfeldig utvalg fra en symmetrisk og kontinuerlig fordeling med sannsynlighetstetthet f_Y. La $\bar{x}$ være middelverdien av dateringene fra den indre delen av kirken og la $\tilde{\mu}$ være medianen til f_Y. Vi vil teste $H_0 : \tilde{\mu} = \bar{x}$ mot alternativet $H_1 : \tilde{\mu} \neq \bar{x}$ ved Wilcoxons ett-utvalgstest.

a) Beregn $\bar{x}$ og sett opp en tabell med y_i, $y_i - \bar{x}$, $|y_i - \bar{x}|$, r_i, z_i og $r_i z_i$. Her er r_i rangen til $|y_i - \bar{x}|$, og z_i er en indikator for $y_i > \bar{x}$.

b) Finn det kritiske området til testvariabelen $W = \sum_i Z_i R_i$ tilsvarende et signifikansnivå $\alpha = 5\%$. Fordelingen til W er lik fordelingen til V_- som finnes i Statistiske tabeller og formler (Tapir). Hva er resultatet av testen? Hva om signifikansnivået endres til $\alpha = 10\%$?

Oppgave 5

Et visst vitamin skal visstnok influere på hyppigheten av forkjølelser. Vi skal se på et eksperiment hvor 200 tilfeldig valgte personer deltok. Personene ble tilfeldig delt inn i to grupper slik at halvparten ble utsatt for vitaminet mens den andre halvparten (kontrollgruppen) bare trodde de ble utsatt for vitaminet. I kontrollgruppen var det 39 med færre forkjølelser, 21 med flere forkjølelser og 40 med uendret antall forkjølelser i forhold til før prøveperioden. De tilsvarende tallene var 51, 20 og 29 i forsøksgruppen.

a) Sett opp en multinomisk modell for forsøket. Gi en tolkning av alle størrelser som inngår.

b) Utfør en χ^2-test med et 5% signifikansnivå for å avgjøre om det er uavhengighet mellom forkjølelsestilfeller og vitaminbehandling.

TABLE A.4 PERCENTILES OF *F* DISTRIBUTIONS (cont.)

n	p \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	p
15	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.029	.045	.061	.076	.091	.105	.117	.129	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.021	.039	.057	.075	.092	.108	.123	.137	.149	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.049	.076	.102	.125	.147	.166	.183	.198	.212	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.103	.132	.158	.181	.202	.219	.235	.249	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.116	.156	.190	.219	.244	.265	.284	.300	.315	.025
	.05	$.0^{2}41$	.051	.115	.170	.216	.254	.285	.311	.333	.351	.368	.382	.05
	.10	.016	.100	.192	.258	.309	.348	.380	.406	.427	.446	.461	.475	.10
	.25	.105	.293	.407	.480	.531	.568	.596	.618	.637	.652	.667	.676	.25
	.50	.478	.726	.826	.878	.911	.933	.948	.960	.970	.977	.984	.989	.50
	.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44	.75
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	.90
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	.95
	.975	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	.975
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	.99
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.33	4.25	.995
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.93	5.81	.999
	.9995	19.5	13.2	10.8	9.48	8.66	8.10	7.68	7.36	7.11	6.91	6.75	6.60	.9995
20	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.029	.046	.063	.079	.094	.109	.123	.136	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.039	.058	.077	.095	.112	.128	.143	.156	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.050	.077	.104	.129	.151	.171	.190	.206	.221	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.071	.105	.135	.162	.187	.208	.227	.244	.259	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.158	.193	.224	.250	.273	.292	.310	.325	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.115	.172	.219	.258	.290	.318	.340	.360	.377	.393	.05
	.10	.016	.106	.193	.260	.312	.353	.385	.412	.435	.454	.472	.485	.10
	.25	.104	.292	.407	.480	.531	.569	.598	.622	.641	.656	.671	.681	.25
	.50	.472	.718	.816	.868	.900	.922	.938	.950	.959	.966	.972	.977	.50
	.75	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	.75
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	.90
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	.95
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	.975
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	.99
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76	3.68	.995
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.94	4.82	.999
	.9995	17.2	11.4	9.20	8.02	7.28	6.76	6.38	6.08	5.85	5.66	5.51	5.38	.9995
24	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.030	.046	.064	.080	.096	.112	.126	.139	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.040	.059	.079	.097	.115	.131	.146	.160	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.050	.078	.106	.131	.154	.175	.193	.210	.226	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.072	.106	.137	.165	.189	.211	.231	.249	.264	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.159	.195	.227	.253	.277	.297	.315	.331	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.173	.221	.260	.293	.321	.345	.365	.383	.399	.05
	.10	.016	.106	.193	.261	.313	.355	.388	.416	.439	.459	.476	.491	.10
	.25	.104	.291	.406	.480	.532	.570	.600	.623	.643	.659	.671	.684	.25
	.50	.469	.714	.812	.863	.895	.917	.932	.944	.953	.961	.967	.972	.50
	.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	.75
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	.90
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	.95
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	.975
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	.99
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.50	3.42	.995
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.50	4.39	.999
	.9995	16.2	10.6	8.52	7.39	6.68	6.18	5.82	5.54	5.31	5.13	4.98	4.85	.9995

TABLE A.4 PERCENTILES OF *F* DISTRIBUTIONS (cont.)

p \ m	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	p
.0005	.159	.197	.220	.244	.272	.290	.303	.330	.339	.353	.368	.377	.0005
.001	.181	.219	.242	.266	.294	.313	.325	.352	.360	.375	.388	.398	.001
.005	.246	.286	.308	.333	.360	.377	.389	.415	.422	.435	.448	.457	.005
.01	.284	.324	.346	.370	.397	.413	.425	.450	.456	.469	.483	.490	.01
.025	.349	.389	.410	.433	.458	.474	.485	.508	.514	.526	.538	.546	.025
.05	.416	.454	.474	.496	.519	.535	.545	.565	.571	.581	.592	.600	.05
.10	.507	.542	.561	.581	.602	.614	.624	.641	.647	.658	.667	.672	.10
.25	.701	.728	.742	.757	.772	.782	.788	.802	.805	.812	.818	.822	.25
.50	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	.50
.75	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75
.90	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90
.95	2.40	2.33	2.39	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95
.975	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.55	2.52	2.47	2.46	2.44	2.41	2.40	.975
.99	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.99
.995	4.07	3.88	3.79	3.69	3.59	3.52	3.48	3.39	3.37	3.33	3.29	3.26	.995
.999	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.70	4.64	4.51	4.47	4.41	4.35	4.31	.999
.9995	6.27	5.93	5.75	5.58	5.40	5.29	5.21	5.06	5.02	4.94	4.87	4.83	.9995
.0005	.169	.211	.235	.263	.295	.316	.331	.364	.375	.391	.408	.422	.0005
.001	.191	.233	.258	.286	.318	.339	.354	.386	.395	.413	.429	.441	.001
.005	.258	.301	.327	.354	.385	.405	.419	.448	.457	.474	.490	.500	.005
.01	.297	.340	.365	.392	.422	.441	.455	.483	.491	.508	.521	.532	.01
.025	.363	.406	.430	.456	.484	.503	.514	.541	.548	.562	.575	.585	.025
.05	.430	.471	.493	.518	.544	.562	.572	.595	.603	.617	.629	.637	.05
.10	.520	.557	.578	.600	.623	.637	.648	.671	.675	.685	.694	.704	.10
.25	.708	.736	.751	.767	.784	.794	.801	.816	.820	.827	.835	.840	.25
.50	.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	.50
.75	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75
.90	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.90
.95	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95
.975	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.25	2.22	2.17	2.16	2.13	2.10	2.09	.975
.99	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.99
.995	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.96	2.92	2.83	2.81	2.76	2.72	2.69	.995
.999	4.56	4.29	4.15	4.01	3.86	3.77	3.70	3.58	3.54	3.48	3.42	3.38	.999
.9995	5.07	4.75	4.58	4.42	4.24	4.15	4.07	3.93	3.90	3.82	3.75	3.70	.9995
.0005	.174	.218	.244	.274	.309	.331	.349	.384	.395	.416	.434	.449	.0005
.001	.196	.241	.268	.298	.332	.354	.371	.405	.417	.437	.455	.469	.001
.005	.264	.310	.337	.367	.400	.422	.437	.469	.479	.498	.515	.527	.005
.01	.301	.350	.376	.405	.437	.459	.473	.505	.513	.529	.546	.558	.01
.025	.370	.415	.441	.468	.498	.518	.531	.562	.568	.585	.599	.610	.025
.05	.437	.480	.501	.530	.558	.575	.588	.613	.622	.637	.649	.669	.05
.10	.527	.566	.588	.611	.635	.651	.662	.685	.691	.704	.715	.723	.10
.25	.712	.741	.757	.773	.791	.802	.809	.825	.829	.837	.844	.850	.25
.50	.983	.994	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	.50
.75	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75
.90	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90
.95	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95
.975	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.11	2.08	2.02	2.01	1.98	1.95	1.94	.975
.99	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.99
.995	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.70	2.66	2.57	2.55	2.50	2.46	2.43	.995
.999	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.35	3.29	3.16	3.14	3.07	3.01	2.97	.999
.9995	4.55	4.25	4.09	3.93	3.76	3.66	3.59	3.44	3.41	3.33	3.27	3.22	.9995

−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

TABLE A.1 CUMULATIVE AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION (cont.)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

SOURCE: B. W. Lindgren, *Statistical Theory* (New York: Macmillan, 1962), pp. 392–393.

Eksamen i	: **S102 - SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK II**
Dato	: **Torsdag 5. desember 1996**
Varighet	: 6 timer
Antall vekttall	: 5

Tillatte hjelpemidler:
Fire håndskrevne A4 sider
Godkjent lommekalkulator
Statistiske tabeller og formler, TAPIR
Matematisk formelsamling

Sensur: Fredag 20. desember 1996

Oppgave 1

La X være en tilfeldig variabel med tetthet:

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \beta^{-1}x^{-(1+1/\beta)} & ; \ x > 1 \\ 0 & ; \ x \leq 1 \end{cases}$$

hvor β er en ukjent positiv parameter.

(a) Vis at

$$E(X) = \frac{1}{1-\beta} \ ;\beta < 1 \ \text{ og } \ E(X^2) = \frac{1}{1-2\beta} \ ;\beta < \frac{1}{2}.$$

og sett opp et uttrykk for variansen til X.

La $X_1, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra $f(x;\beta)$.

(b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β er gitt ved

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i$$

Dobbelderivertetest kreves ikke.

(c) Definer $U = \log X$, og vis at

$$f_U(u) = \frac{1}{\beta}\, e^{-u/\beta} \ ; \ u \geq 0$$

Dvs. U er eksponensialfordelt med forventning β og varians β^2. Bruk dette til å finne forventningen og variansen til $\hat{\beta}$.

(d) Finn den såkalte Fisherinformasjonen om β i utvalget, dvs. $nI(\beta)$, hvor $I(\beta) = \mathrm{Var}(\frac{d}{d\beta}\log f(X;\beta))$. Hva er den minste varians en forventningsrett estimator for β kan ha?
Er $\hat{\beta}$ en god estimator? Begrunn svaret.

(e) Utled momentestimatoren for β. Kritiser bruken av den i vår modell.

(f) Du skal nå danne et 95% konfidensintervall for β. Det skal du gjøre ved å ta utgangspunkt i størrelsen $Y = 2n\hat{\beta}/\beta$. I bestrebelsene etter å finne fordelingen til Y, får du oppgitt følgende resultat: Momentgenererende funksjon til en χ^2_n fordelt variabel er $(\frac{1}{1-2t})^{n/2}$, $t < 1/2$.

Oppgave 2

En biolog studerer spredningen av en plantesykdom populært kalt krypende råte. Hun tar for seg en åker med kålplanter som hun deler inn i 270 k-vadrater, hvert kvadrat med like mange planter. For hvert kvadrat registrerer hun hvor mange planter som er befengt. La X være antall planter befengt med krypende råte i et vilkårlig kvadrat. Hvis vi antar at antall infiserte planter i de ulike kvadratene er uavhengige, er biologens observasjoner 270 realisasjoner av den tilfeldige variable X, si $x_1, x_2, \ldots, x_{270}$. Observasjonene er presentert på følgende måte.

Antall infiserte planter/kvadrat	Antall kvadrater
0	38
1	57
2	68
3	47
4	23
5	9
6	10
7	7
8	3
9	4
10	2
11	1
12	1
13+	0

Her betyr f.eks. paret (6,10) at 10 av x_i'ene ble 6, osv.
Biologen ønsker å få svar på om X kan sies å være Poisson-fordelt. Dette skal du være behjelpelig med.

(a) Anta X er Poisson-fordelt med parameter λ. Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatet for λ.

(b) Utfør den relevante testingen. Du kan avrunde estimatet av λ til en desimals nøyaktighet hvis du ønsker å bruke tabell.

(c) Hvis du har regnet riktig vil du få soleklar forkastning i punkt b). Gi en fysisk forklaring på at X ikke kan sies å være Poisson- fordelt. Hvilken av antakelsene bak en Poisson-modell svarer dette til?

Oppgave 3

En forsker ønsker å bestemme hvordan responsen Y påvirkes av dosering x av to sammenlignbare behandlinger. Behandling 1 gis til n_1 personer i forskjellige doser og behandling 2 gis til en annen uavhengig gruppe på n_2 personer. Datastrukturen er

Dose x_1 av behandling 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n_1}
Respons y_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n_1}
Dose x_2 av behandling 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n_2}
Respons y_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n_2}

Vi antar vanlig lineær-normal regresjonsmodell for begge grupper,dvs.

$$\text{Behandling 1: } Y_{1i} = a_1 + b_1 x_{1i} + e_{1i},\ i = 1,\ldots,n_1$$

$$\text{Behandling 2: } Y_{2i} = a_2 + b_2 x_{2i} + e_{2i},\ i = 1,\ldots,n_2$$

hvor feilleddene er normalfordelte med forventning null og varians σ^2. Vi ønsker å teste $H_0 : b_1 = b_2$ mot $H_1 : b_1 \neq b_2$
La $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$ være MKE for b_1 og b_2 i hhv. regresjonsmodell 1 og 2. La SSE(1) og SSE(2) være tilsvarende error sum of squares. La endelig

$$S_{x_1}^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \text{ og } S_{x_2}^2 = \sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$$

NB! I denne oppgaven behøver ikke kjente resultat fra regresjonsanalysen bevises.

(a) Vis, ut fra det du vet om fordelingen til $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$, at

$$\hat{b}_1 - \hat{b}_2 \sim \mathrm{N}(b_1 - b_2, \sigma^2(\frac{1}{S_{x_1}^2} + \frac{1}{S_{x_2}^2}))$$

(b) Forklar hvorfor

$$s_{pooled}^2 = \frac{SSE(1) + SSE(2)}{n_1 + n_2 - 4}$$

er en fornuftig estimator for σ^2 basert på begge utvalgene.
Hvilken fordeling har $s_{pooled}^2(n_1 + n_2 - 4)/\sigma^2$?

(c) Vis at

$$T = \frac{\hat{b}_1 - \hat{b}_2 - (b_1 - b_2)}{s_{pooled}\sqrt{\frac{1}{S_{x_1}^2} + \frac{1}{S_{x_2}^2}}} \sim t_{n_1+n_2-4}$$

Sett til slutt opp forkastningsområdet til en test for H_0 mot H_1 med signifikansnivå α.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast) vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

EKSAMEN I S 102 – Sannsynlighet og statistikk II

Dato: 13. mai 1996 — 6 timer

5 vekttall

Tillatte hjelpemidler: 7 sider notater, Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*, instituttets kalkulator

2 sider

Sensur: 31. mai 1996

Oppgave 1

Anta at (X, Y) har simultanfordeling $f_{X,Y}$ gitt ved at

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x & \text{hvis } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(a) Finn marginalfordelingene f_X og f_Y til henholdsvis X og Y.

(b) Finn den betingede fordelingen $f_{Y|x}$ til Y gitt $X = x$. Finn $E(Y|X = x)$. Er $E(Y|X = x)$ lineær i x?

(c) Finn $\text{Cov}(X, Y)$ og $\rho(X, Y)$.

(d) Finn $\text{Var}(X + Y)$.

Oppgave 2

La $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ være uavhengige variabler, hver med sannsynlighetstetthet f gitt ved at $f(y) = \frac{y}{\theta^2}e^{-y^2/(2\theta^2)}$ for $y > 0$ og $f(y) = 0$ for $y \leq 0$, der $\theta > 0$ er en parameter.

(a) Finn en suffisient observator for θ.

(b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for θ (vis at "likelihoods"-funksjonen oppnår maksimum her).

(c) Vis at $E\hat{\theta}^2 = \theta^2$.

(d) Bruk resultatet i (c) til å vise at $E\hat{\theta} < \theta$.

(e) Vis at $EY_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$. Finn momentestimatoren for θ. (Du kan bruke at $\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}\,dt = \sqrt{\pi}/2$.)

(f) Er momentestimatoren forventningsrett? Begrunn svaret.

Oppgave 3

Anta at vi har følgende observasjoner fra en (x, Y)-regresjonsmodell der $Y \sim N(a + bx, \sigma^2)$:

x	8	8	12	12	16	16	20	20	24	24
Y	8	6	6	10	8	14	14	12	16	12

Det oppgis at $\sum x_i = 160$, $\sum Y_i = 106$, $\sum x_i^2 = 2880$, $\sum Y_i^2 = 1236$ og $\sum x_iY_i = 1848$.

(a) Beregn minste-kvadraters-estimatene for a og b, og finn et punktestimat for EY når $x = 15$.

(b) Gir data grunnlag for å påstå at Y har en tendens til å vokse når x vokser? Formuler passende H_0 og H_1, og test med signifikansnivå 0,05.

(c) Finn et 95 %-prediksjonsintervall for Y når $x = 22$. Gi en fortolkning av intervallet.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen

Bokmål

EKSAMEN I S 102 – Sannsynlighet og statistikk II

Dato: 7. desember 1995 — 6 timer

5 vekttall

Tillatte hjelpemidler: 7 sider notater, Samsets og Torvaldsens *Statistiske tabeller og formler*, instituttets kalkulator

2 sider

Sensur: 28. desember 1995

Oppgave 1

Et 5-grams-lodd veies 11 ganger på én vekt og 21 ganger på en annen. «Sample»-standardavviket (s) blir 3,4 milligram på den første og 5,2 milligram på den andre. Gir dette grunnlag for å si at en av vektene gir større målevariasjon enn den andre? Bruk signifikansnivå 10 %. Anta at observasjonene er uavhengige og normalfordelte.

Oppgave 2

Anta at Y er en stokastisk variabel med momentgenererende funksjon M_Y. Vi definerer *kumulantgenererende funksjon* K_Y ved at $K_Y(t) = \ln M_Y(t)$. Vis at $K_Y'(0) = E(Y)$ og at $K_Y''(0) = \mathrm{Var}(Y)$.

Oppgave 3

La X være en variabel med sannsynlighetstetthet f_X gitt ved at

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/(2\theta^2)}$$

for alle $x > 0$, og $f_X(x) = 0$ for $x \leq 0$, der $\theta > 0$ er en parameter.

(a) Vis at momentgenererende funksjon for X er gitt ved at

$$M_X(t) = 2e^{\theta^2 t^2/2}\Phi(\theta t)$$

for alle t, der Φ er kumulativ fordeling til en standard normalfordelt variabel, dvs.

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx$$

for alle t.

(b) Vis at forventningsverdi og varians for X er henholdsvis $\theta\sqrt{2/\pi}$ og $\theta^2(1-2/\pi)$. (Du kan bruke resultatet fra oppgave 2 hvis du vil.)

(c) Finn momentestimatoren θ^* for θ. Vis at den er forventningsrett.

(d) Finn effisiensen til θ^*.

(e) Finn en suffisient observator for θ.

(f) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for θ. Er den suffisient?

Oppgave 4

Anta at vi har 4 observasjoner $(-1,\ 1)$, $(0,\ 1{,}1)$, $(1,\ 1{,}8)$ og $(2,\ 1)$ fra en (x, Y)-regresjonsmodell der $Y \sim N(a + bx, \sigma^2)$.

(a) Regn ut sannsynlighetsmaksimeringsestimatene for a og b. Finn et estimat for $E(Y)$ når $x = 0$.

(b) Finn et 95 %-konfidensintervall for $E(Y)$ når $x = 0$.

(c) Anta nå at en vilkårlig x er gitt. Vi ønsker å teste hypotesen H_0: $E(Y|x) = 0$ mot alternativet H_1: $E(Y|x) \neq 0$. Foreslå en testobservator. Gjennomfør testen på 5 %-nivå for tilfellene $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$.

(d) La x_0 være definert ved at $E(Y|x_0) = 0$ (dvs. $a + bx_0 = 0$). Finn et 95 %-konfidens-«intervall» for x_0.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Bokmål

Eksamen i	: S 102 SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK II
Dato	: Torsdag 11. mai 1995
Varighet	: 6 timer
Antall vekttall	: 5

Tillatte hjelpemidler:
Seks A4-sider notater. Statistiske tabeller, (Samseth & Thorvaldsen), Instituttets lommeregner.

Sensur: Mandag 23. mai 1995

Oppgave 1

En Brownsk bevegelse med konstant drift er karakterisert ved at et punkt i løpet av tid t forflytter seg en avstand $W \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Forflytningen i et tidsintervall avhenger bare av utgangsposisjonen, og er uavhengig av hva som har skjedd tidligere. Vi ønsker å trekke slutninger om μ og σ^2 på grunnlag av posisjonsmålinger $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ gjort på tidspunkter $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Innfør først nye variable

$$Y_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \qquad \text{og}$$

$$u_i = \sqrt{t_i - t_{i-1}}, \quad i = 1.2 \ldots, n.$$

(a) Vis ved hjelp av kjente setninger at $Y_i \sim N(\mu u_i, \sigma^2)$.

(b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren μ^* for μ. Uttrykk μ ved de opprinnelige variable (X_i, t_i) og kommenter svaret.

(c) Det kan vises at μ^* og $Z = \frac{1}{\sigma^2}\sum(Y_i - \mu^* u_i)^2$ er uavhengige og at Z er χ^2-fordelt med $(n-1)$ frihetsgrader.
Bruk dette til å utlede en test for

$$H_0: \quad \mu = 0$$
$$\text{mot} \quad H_1: \quad \mu > 0.$$

(d) Gjennomfør testen når observasjonene er

X_i	0	0.18	0.11	0.38	0.39	0.24
t_i	0	1	3	8	9	12

Oppgave 2

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige variable med fordeling

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad k, \lambda > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) Finn momentgenererende funksjon til X_i. Bruk denne til å finne EX_i og $\text{var}(X_i)$. Hvilken fordeling har $\sum_{i=1}^n X_i$?

(b) Innfør $Y_i = X_i / \sum_{j=1}^n X_j$. Da blir Y_i betafordelt med parametre $k, (n-1)k$. Det oppgis at $\text{var}(Y_i) = \frac{n-1}{n^2(nk+1)}$. √(+)
Bruk det faktum av $\sum_{i=1}^n Y_i = 1$ til å finne cov (Y_i, Y_j), og korrelasjonen $\rho(Y_i, Y_j)$ for $i \neq j$.

(c) Hva blir var $(Y_1 + Y_2 + \cdots Y_s)$, $s < n$.

Oppgave 3

La X_i og Y_i være som i oppgave 2 og innfør i tillegg $Z = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Finn simultanfordelingen til $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Z)$. Det oppgis at Jakobideterminanten for transformasjonen er Z^{n-1}. Hva blir cov (Z, Y_i)?

(b) Finn simultanfordelingen til $Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1}$.

Oppgave 4

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være definert som i Oppgave 2, men anta nå at λ er kjent lik 1.

(a) Vis at $W = \Pi_{i=1}^n X_i$ er suffisient for k.

(b) Funksjonen $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ kalles digammafunksjonen og $\psi'(z) = \frac{d}{dz}\psi(z)$ kalles trigammafunksjonen og finnes i matematiske tabeller. Det kan vises at $E \ln X_i = \psi(k)$ og var $(\ln X_i) = \psi'(k)$.
Skriv opp en tilnærmelse til fordelingen til $\ln W$ som er gyldig når n er stor.

hvor $\beta > 0$.

Vi ønsker å teste hypotesen

$$H_0: \quad \alpha = \beta$$

mot alternativet

$$H_1: \quad \alpha \neq \beta$$

Vis at sannsynlighetskvotetesten forkaster H_0 når

$$(1+v)^n(1+\frac{1}{v})^m > c$$

der $v = \frac{\sum_{j=1}^m Y_j^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$.

(e) Forkastningsområdet kan skrives på formen $\{v > c_1\} \cup \{v > c_2\}$. Velg c_1 og c_2 slik at

$$P(v < c_1 | H_0) = P(v > c_2 | H_0) = \frac{\alpha}{2},$$

og uttrykk c_1 og c_2 ved hjelp av kvantiler i en kjent fordeling.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

Eksamen i : S 102 - SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK II

Dato : Onsdag 7. desember 1994

Varighet : 6 timer
Antall vekttall : 5

Tillatte hjelpemidler:
Seks A4-sider notater
Statistiske tabeller, (Samseth & Thorvaldsen), Instituttets lommeregner

Sensur: Torsdag 22. desember 1994

Oppgave 1

La (X, Y) være binormalfordelt med parametre $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho) = (1, 1, 4, 4, 0.5)$.

(a) Finn $P(X > 2|Y = 3)$.

(b) Finn korrelasjonen mellom $(X + Y)$ og $(X - Y)$.

(c) Finn
$$P(X + Y > 3|X = Y)$$

Oppgave 2

La X og Y være uavhengige stokastiske variable med sannsynlighetstettheten hhv.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{for} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\omega^s}{\Gamma(s)} y^{s-1} e^{-\omega y} & \text{for} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der λ, r, ω og s er positive parametre.

(a) Finn sannsynlighetstettheten til $Z = X/(X + Y)$.

(b) Hvis $\lambda = \omega$ blir

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} z^{r-1}(1-z)^{s-1}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Finn den momentgenererende funksjonen til $\ln(Z)$.

(Hint: $e^{t \ln(z)} = z^t$)

Finn spesielt EZ og $\text{var}(Z)$ uttrykt ved r og s.

(c) Fordelingen til Z kalles betafordelingen med parametre (r, s). La U være uavhengig av Z og betafordelt med parametre $(r + s, v)$. Finn den momentgenererende funksjonen til $\ln(W)$ der $W = Z \cdot U$.

(d) Skriv opp sannsynlighetstettheten til W.

Oppgave 3

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige stokastiske variable med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\alpha x e^{-\alpha x^2} & \text{for} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\alpha > 0$.

(a) Hvilken fordeling har $2\alpha X_1^2$? Hvilken fordeling har $2\alpha \Sigma_{1=i}^n X_i^2$?

(b) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren W for α basert på $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

(c) Vis at W er en funksjon av en suffisient observator og dermed suffisient.

(d) La $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ være uavhengige av hverandre og av $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sannsynlighetstetthet

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\beta y e^{-\beta y^2} & \text{for} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\beta > 0$.

Vi ønsker å teste hypotesen

$$H_0: \ \alpha = \beta$$

mot alternativet

$$H_1: \ \alpha \neq \beta$$

Vis at sannsynlighetskvotetesten forkaster H_0 når

$$(1+v)^n(1+\frac{1}{v})^m > c$$

der $v = \frac{\sum_{j=1}^m Y_j^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$.

(e) Forkastningsområdet kan skrives på formen $\{v > c_1\} \cup \{v > c_2\}$. Velg c_1 og c_2 slik at

$$P(v < c_1 | H_0) = P(v > c_2 | H_0) = \frac{\alpha}{2},$$

og uttrykk c_1 og c_2 ved hjelp av kvantiler i en kjent fordeling.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Bokmål

Eksamen i	: **S 102 - SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK II**
Dato	: **Fredag 17. desember 1993**
Varighet	: 6 timer
Antall vekttall	: 5

Tillatte hjelpemidler:
Seks A4-sider notater
Lommekalkulator

Sensur: Tirsdag 11. januar 1994

Antall sider: 4 + 3 sider tabeller.

Oppgave 1 La Y være en tilfeldig variabel med fordeling:

$$P(Y=y)=\frac{2-y^2}{4},\ y=-1,0,1$$

La $Y_1,\ldots,Y_n$ være uavhengige observasjoner av Y.

La $X_1,X_2,\ldots,X_n$ være et tilfeldig utvalg der den betingede fordelingen til X_i gitt $Y_i=y$ er lik:

$$X_i|Y_i=y\sim \text{Bin}\,(2,\frac{1}{2}+y\beta),\ 0<\beta<\frac{1}{2}.$$

(a) Finn $E(Y_i)$, $E(X_i|Y_i=y)$ og $E(X_i)$.

(b) Vis at fordelingen til X_i er:

$$\begin{aligned} P(X_i=0) &= P(X_i=2)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\beta^2 \\ P(X_i=1) &= \tfrac{1}{2}-\beta^2, \end{aligned}$$

og regn ut $E(X_i)$ og Var (X_i) ved å bruke denne fordelingen.

(c) Finn Momentgenererende funksjon til X_i, og bruk denne til å finne $E(X_i)$.

Bokmål

(d) Anta at n er stor og la $Z=\bar{X}$. Forklar hvorfor Z vil være tilnærmet

$$N(1,\frac{1}{n}(\beta^2+\frac{1}{2})).$$

La $n=50$ og vis at

$$<-\infty,\ 0.804]\cup[1,196,\ \infty>$$

er et tilnærmet 5 % nivå forkastningsområde til en test basert på Z av $H_0:\beta=0$ mot $H_1:\beta\neq 0$

Oppgave 2 La $Y_1,\ldots,Y_n$ være uavhengige, identisk fordelte med sannsynlighetstetthet

$$f_{Y_i}(y)=\begin{cases}\frac{y}{\theta^2}e^{-y^2/2\theta^2} & \text{hvis } y>0\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}\quad ;\theta>0.$$

(a) Finn en suffisient observator for θ.

(b) Utled maksimum likelihood estimatoren for θ. (Vis at den oppnår maksimum!)

(c) Vis at $E(\hat{\theta}^2)=\theta^2$.

(d) Bruk resultatet i (c) til å vise at $E(\hat{\theta})<\theta$.

(e) La $\mu=E(Y_i)$. Vis at $\mu=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$. Finn moment-estimatoren til θ.
(Hint: $\int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).

(f) Er moment-estimatoren i (e) en funksjon av en suffisient observator? Er den forventningsrett? Begrunn svarene.

Oppgave 3

Anta $Y_1,\ldots,Y_n$ er uavhengige, Poisson-fordelte med parameter θ, dvs.:

$$P(Y_i=y)=\frac{\theta^y e^{-\theta}}{y!};\ y=0,1,2,\ldots.$$

Vi skal teste

$$H_0:\theta=1\ \text{ mot }\ H_1:\theta\neq 1.$$

(a) Vis at likelihoodkvote-testobservatoren er gitt ved:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})} = \frac{1}{(\bar{Y})^{n\bar{Y}} e^{n(1-\bar{Y})}}; \ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

(b) La $T(\bar{Y}) = n\bar{Y}\log(\bar{Y}) - n\bar{Y}$. Uttrykk likelihoodkvotetesten med T som testobservator.

(c) Vis at testen i (b) kan uttrykkes på formen:

Forkast H_0 hvis

$\bar{Y} \leq k_1$ eller $\bar{Y} \geq k_2$

hvor k_1 og k_2 er bestemt ved:

$$T(k_1) = T(k_2), \text{ og}$$

$$\sum_{1=nk_1+1}^{nk_2-1} \frac{n^i e^{-n}}{i!} = 1 - \alpha.$$

(Du kan her bruke at $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ er Poissonfordelt).

Oppgave 4 En undersøkelse ble foretatt for å bestemme effekten av søvnløshet på personers evne til å løse enkle problemer. Tiden uten søvn varierte over 8, 12, 16, 20 og 24 timer. 10 personer deltok i undersøkelsen, 2 på hvert nivå. Etter den spesifiserte tid uten søvn, ble hver person gitt et sett av enkle addisjonsproblemer og antall feil ble notert. Resultatene ble:

Antall feil (Y)	8,6	6,10	8,14	14,12	16,12
Antall timer uten søvn (x)	8	12	16	20	24

Det oppgis at: $\sum x_i = 160$, $\sum Y_i = 106$, $\sum x_i^2 = 2880$, $\sum Y_i^2 = 1236$, $\sum x_i Y_i = 1848$.

Det antas at den lineærnormale regresjonsmodellen holder ($Y = \alpha + \beta x + e$, e er $N(0, \sigma^2)$).

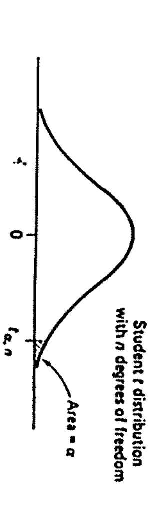
(a) Beregn minstekvadraters estimatene $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, og finn et punktestimat for forventet antall feil når $x = 15$.

(b) Gir data grunnlag for å påstå at antall feil har en tendens til å øke når x øker? Formuler passende H_0 og H_1, og test med $\alpha = .05$.

(c) Finn et 95 % prediksjonsintervall for Y når $x = 22$. Gi en fortolkning av det beregnede intervallet i forhold til konfidensgraden 95 %. Kan du tenke deg alternative kriterier for å vurdere prediksjonsintervallet, og isåfall, hvilke?

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

TABLE A.2 UPPER PERCENTILES OF STUDENT t DISTRIBUTIONS



df	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	0.978	1.250	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	0.941	1.190	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	0.920	1.156	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	0.906	1.134	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	0.896	1.119	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	0.889	1.108	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	0.883	1.100	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	0.879	1.093	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	0.876	1.088	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	0.873	1.083	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	0.870	1.079	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	0.868	1.076	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	0.866	1.074	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	0.865	1.071	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	0.863	1.069	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	0.862	1.067	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	0.861	1.066	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	0.860	1.064	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	0.859	1.063	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	0.858	1.061	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	0.858	1.060	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	0.857	1.059	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	0.856	1.058	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	0.856	1.058	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	0.855	1.057	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	0.855	1.056	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	0.854	1.055	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	0.854	1.055	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
31	0.8535	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.453	2.7441
32	0.8531	1.0536	1.3086	1.6939	2.0370	2.449	2.7385
33	0.8527	1.0531	1.3078	1.6924	2.0345	2.445	2.7333
34	0.8524	1.0526	1.3070	1.6909	2.0323	2.441	2.7284

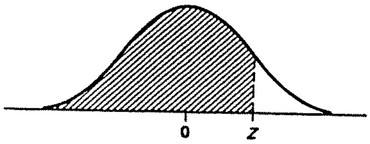
TABLE A.4 PERCENTILES OF F DISTRIBUTIONS (cont.)

n	p \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	p
15	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.029	.045	.061	.076	.091	.105	.117	.129	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.021	.039	.057	.075	.092	.108	.123	.137	.149	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.049	.076	.102	.125	.147	.166	.183	.198	.212	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.103	.132	.158	.181	.202	.219	.235	.249	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.116	.156	.190	.219	.244	.265	.284	.300	.315	.025
	.05	$.0^{2}41$	.051	.115	.170	.216	.254	.285	.311	.333	.351	.368	.382	.05
	.10	.016	.106	.192	.258	.309	.348	.380	.406	.427	.446	.461	.475	.10
	.25	.105	.293	.407	.480	.531	.568	.596	.618	.637	.652	.667	.676	.25
	.50	.478	.726	.826	.878	.911	.933	.948	.960	.970	.977	.984	.989	.50
	.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44	.75
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	.90
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	.95
	.975	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	.975
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	.99
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.33	4.25	.995
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.93	5.81	.999
	.9995	19.5	13.2	10.8	9.48	8.66	8.10	7.68	7.36	7.11	6.91	6.75	6.60	.9995
20	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.029	.046	.063	.079	.094	.109	.123	.136	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.039	.058	.077	.095	.112	.128	.143	.156	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.050	.077	.104	.129	.151	.171	.190	.206	.221	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.071	.105	.135	.162	.187	.208	.227	.244	.259	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.158	.193	.224	.250	.273	.292	.310	.325	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.115	.172	.219	.258	.290	.318	.340	.360	.377	.393	.05
	.10	.016	.106	.193	.260	.312	.353	.385	.412	.435	.454	.472	.485	.10
	.25	.104	.292	.407	.480	.531	.569	.598	.622	.641	.656	.671	.681	.25
	.50	.472	.718	.816	.868	.900	.922	.938	.950	.959	.966	.972	.977	.50
	.75	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	.75
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	.90
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	.95
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	.975
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	.99
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76	3.68	.995
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.94	4.82	.999
	.9995	17.2	11.4	9.20	8.02	7.28	6.76	6.38	6.08	5.85	5.66	5.51	5.38	.9995
24	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.030	.046	.064	.080	.096	.112	.126	.139	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.040	.059	.079	.097	.115	.131	.146	.160	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.050	.078	.106	.131	.154	.175	.193	.210	.226	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.072	.106	.137	.165	.189	.211	.231	.249	.264	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.159	.195	.227	.253	.277	.297	.315	.331	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.173	.221	.260	.293	.321	.345	.365	.383	.399	.05
	.10	.016	.106	.193	.261	.313	.355	.388	.416	.439	.459	.476	.491	.10
	.25	.104	.291	.406	.480	.532	.570	.600	.623	.643	.659	.671	.684	.25
	.50	.469	.714	.812	.863	.895	.917	.932	.944	.953	.961	.967	.972	.50
	.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	.75
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	.90
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	.95
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	.975
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	.99
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.50	3.42	.995
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.50	4.39	.999
	.9995	16.2	10.6	8.52	7.39	6.68	6.18	5.82	5.54	5.31	5.13	4.98	4.85	.9995

TABLE A.4 PERCENTILES OF F DISTRIBUTIONS (cont.)

p \ m	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	p	n
.0005	.159	.197	.220	.244	.272	.290	.303	.330	.339	.353	.368	.377	.0005	15
.001	.181	.219	.242	.266	.294	.313	.325	.352	.360	.375	.388	.398	.001	
.005	.246	.286	.308	.333	.360	.377	.389	.415	.422	.435	.448	.457	.005	
.01	.284	.324	.346	.370	.397	.413	.425	.450	.456	.469	.483	.490	.01	
.025	.349	.389	.410	.433	.458	.474	.485	.508	.514	.526	.538	.546	.025	
.05	.416	.454	.474	.496	.519	.535	.545	.565	.571	.581	.592	.600	.05	
.10	.507	.542	.561	.581	.602	.614	.624	.641	.647	.658	.667	.672	.10	
.25	.701	.728	.742	.757	.772	.782	.788	.802	.805	.812	.818	.822	.25	
.50	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	.50	
.75	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75	
.90	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90	
.95	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95	
.975	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.55	2.52	2.47	2.46	2.44	2.41	2.40	.975	
.99	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.99	
.995	4.07	3.88	3.79	3.69	3.59	3.52	3.48	3.39	3.37	3.33	3.29	3.26	.995	
.999	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.70	4.64	4.51	4.47	4.41	4.35	4.31	.999	
.9995	6.27	5.93	5.75	5.58	5.40	5.29	5.21	5.06	5.02	4.94	4.87	4.83	.9995	
.0005	.169	.211	.235	.263	.295	.316	.331	.364	.375	.391	.408	.422	.0005	20
.001	.191	.233	.258	.286	.318	.339	.354	.386	.395	.413	.429	.441	.001	
.005	.258	.301	.327	.354	.385	.405	.419	.448	.457	.474	.490	.500	.005	
.01	.297	.340	.365	.392	.422	.441	.455	.483	.491	.508	.521	.532	.01	
.025	.363	.406	.430	.456	.484	.503	.514	.541	.548	.562	.575	.585	.025	
.05	.430	.471	.493	.518	.544	.562	.572	.595	.603	.617	.629	.637	.05	
.10	.520	.557	.578	.600	.623	.637	.648	.671	.675	.685	.694	.704	.10	
.25	.708	.736	.751	.767	.784	.794	.801	.816	.820	.827	.835	.840	.25	
.50	.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	.50	
.75	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75	
.90	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.90	
.95	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95	
.975	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.25	2.22	2.17	2.16	2.13	2.10	2.09	.975	
.99	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.99	
.995	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.96	2.92	2.83	2.81	2.76	2.72	2.69	.995	
.999	4.56	4.29	4.15	4.01	3.86	3.77	3.70	3.58	3.54	3.48	3.42	3.38	.999	
.9995	5.07	4.75	4.58	4.42	4.24	4.15	4.07	3.93	3.90	3.82	3.75	3.70	.9995	
.0005	.174	.218	.244	.274	.309	.331	.349	.384	.395	.416	.434	.449	.0005	24
.001	.196	.241	.268	.298	.332	.354	.371	.405	.417	.437	.455	.469	.001	
.005	.264	.310	.337	.367	.400	.422	.437	.469	.479	.498	.515	.527	.005	
.01	.301	.350	.376	.405	.437	.459	.473	.505	.513	.529	.546	.558	.01	
.025	.370	.415	.441	.468	.498	.518	.531	.562	.568	.585	.599	.610	.025	
.05	.437	.480	.504	.530	.558	.575	.588	.613	.622	.637	.649	.659	.05	
.10	.527	.566	.588	.611	.635	.651	.662	.685	.691	.704	.715	.723	.10	
.25	.712	.741	.757	.773	.791	.802	.809	.825	.829	.837	.844	.850	.25	
.50	.983	.994	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	.50	
.75	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75	
.90	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90	
.95	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95	
.975	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.11	2.08	2.02	2.01	1.98	1.95	1.94	.975	
.99	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.99	
.995	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.70	2.66	2.57	2.55	2.50	2.46	2.43	.995	
.999	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.35	3.29	3.16	3.14	3.07	3.01	2.97	.999	
.9995	4.55	4.25	4.09	3.93	3.76	3.66	3.59	3.44	3.41	3.33	3.27	3.22	.9995	

TABLE A.1 CUMULATIVE AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

TABLE A.1 CUMULATIVE AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION (cont.)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

SOURCE: B. W. Lindgren, *Statistical Theory* (New York: Macmillan, 1962), pp. 392–393.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
Den allmennvitenskapelige høgskolen
Institutt for matematikk og statistikk

Bokmål

EKSAMEN I S102 – SANNSYNLIGHETSREGNING OG STATISTIKK II

Dato:	10. desember 1992
Eksamenstid:	6 timer
Antall vekttall:	5
Antall sider:	4 + 3 sider tabeller
Tillatte hjelpemidler:	Lommekalkulator og Statistiske tabeller (J. Samseth og A. Thorvaldsen) og Formelsamling i matematikk (Jahren og Knudsen)
Sensur:	23. desember 1992

OPPGAVE 1

La følgende simultanfordeling være gitt

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Finn marginalfordelingene $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

b) Finn den betingede fordelingen til Y gitt x, $f_{Y|x}(y)$ og $E(Y|x)$. Er $E(Y|x)$ lineær i x?

c) Finn $Cov(X,Y)$ og $\rho(X,Y)$.

d) Finn $Var(X+Y)$.

OPPGAVE 2

La $Y_1,\ldots,Y_N$ være et tilfeldig utvalg fra følgende fordeling:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta^2} y\, e^{-y/\theta}, \qquad y > 0, \theta > 0$$

a) Vis at momentgenererende funksjon for X er gitt ved:

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1-\theta t)^2}.$$

Bruk denne til å finne $E(Y)$ og $Var(Y)$.

b) Vis at både momentestimatoren og maksimum likelihood estimatoren for θ er gitt ved

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{Y}}{2}$$

Er $\hat{\theta}$ forventningsrett for θ?

c) Vis at Cramer Raos nedre grense for variansen til en forventningsrett estimator for θ er gitt ved $c = \frac{\theta^2}{2n}$.

Er $\hat{\theta}$ effisient?

Det oppgis at $c = \left\{ n\, E\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y;\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$

d) Finn en suffisient observator for θ.

e) Vis at $\frac{4n\hat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2_{4n}$. Bruk dette til å konstruère et $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for θ.

Hint: Vis først at $\frac{2Y_i}{\theta} \sim \chi^2_4$.

OPPGAVE 3

Anta at det tas to uavhengige tilfeldige utvalg $X_1,\ldots,X_{25}$ og $Y_1,\ldots,Y_{25}$. Resultatet finner vi i følgende MINITAB–utskrift ($X_1,\ldots,X_{25}$ ligger i c1, $Y_1,\ldots,Y_{25}$ i c2):

```
MTB > print c1 c2
 ROW     C1     C2

   1    1.8    3.8
   2    2.5    4.4
   3    2.8    4.6
   4    4.0    4.9
   5    4.4    5.0
   6    4.4    5.1
   7    4.6    5.3
   8    4.7    5.5
   9    4.7    5.5
  10    4.9    5.5
  11    5.0    5.7
  12    5.0    5.8
  13    5.2    6.1
  14    5.4    6.2
  15    5.4    6.2
  16    5.7    6.4
  17    5.9    6.7
  18    6.0    6.8
  19    6.2    7.0
  20    6.3    7.1
  21    6.5    7.1
  22    6.5    7.2
  23    6.6    7.5
  24    7.0    8.0
  25    7.6    8.2

MTB > describe c1 c2

              N     MEAN   MEDIAN   TRMEAN    STDEV   SEMEAN
C1           25    5.164    5.200    5.204    1.390    0.278
C2           25    6.064    6.100    6.070    1.136    0.227

            MIN      MAX       Q1       Q3
C1        1.800    7.600    4.500    6.250
C2        3.800    8.200    5.200    7.050
```

a) Gjør en goodness–of–fit–test for å teste om $X_1,\ldots,X_{25}$ kan antas å være normal–fordelte. La $\alpha=0.10$.

Hint: Del inn i 4 klasser etter kvartilene x_i^*: $P(X \le x_i^*)=\frac{i}{4}$, $i=1,2,3$. Det oppgis at $x_1^* = 4.226$ og $x_3^* = 6.102$.

I resten av oppgaven antas at $X_1,\ldots,X_{25} \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ og $Y_1,\ldots,Y_{25} \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$.

b) Test H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ mot H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. La $\alpha=0.20$.

c) Vi ønsker å teste H_0: $\mu_X = \mu_Y$ mot H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$.
Anta $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Test hypotesene ved å bruke en to–utvalgs t–test. La $\alpha=0.01$.
Finn en øvre grense for P–verdien. Basert på denne verdien, ville du ha forkastet H_0 på 5% nivå?

d) Lag et 99% konfidensintervall for $\mu_X - \mu_Y$. Gi en fortolkning av intervallet. Forklar spesielt hva det betyr at nivået er 99%.

e) Hypotesene i c) kan også testes med en variansanalyse. Sett opp ANOVA–tabellen.

Det oppgis at $SS_{total} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{n}$ og $SS_{treatments} = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n}$.

Følgende MINITAB–utskrift kan være til hjelp:

```
MTB > let c3=c1**2
MTB > let c4=c2**2
MTB > sum c1
   SUM      =        129.10
MTB > sum c2
   SUM      =        151.60
MTB > sum c3
   SUM      =        713.01
MTB > sum c4
   SUM      =        950.28
```

Vis at testobservatoren her er kvadratet av testobservatoren i c).

OPPGAVE 4

Anta at vi har en populasjon bestående av $N = 4$ enheter med verdier $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Vi ønsker å estimere $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

a) Anta at vi tar et enkelt tilfeldig utvalg på $n = 2$ enheter hvor vi observerer (X_1,X_2).
Finn fordelingen til $\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1+X_2)$ ved å generere alle mulige slike utvalg.
Beregn $E(\overline{X})$ og $Var(\overline{X})$. Er $\overline{X}$ forventningsrett?

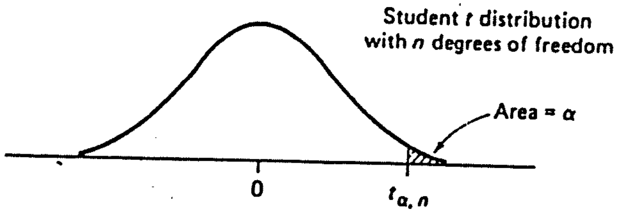
b) Anta nå at vi deler populasjonen inn i to strata etter fortegnet på x_i, *dvs.*

$$\text{Stratum } 1 = \{x_i : x_i \le 0\},\ \text{Stratum } 2 = \{x_i : x_i > 0\}$$

Vi trekker en verdi tilfeldig fra hvert stratum: (X_1,X_2). Finn fordelingen til den stratifiserte estimatoren $\overline{X}_s = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{2} N_l X_l$, hvor N_l = Antall i stratum l i populasjonen . Finn $E(\overline{X}_s)$ og $Var(\overline{X}_s)$. Er $\overline{X}_s$ forventningsrett?

c) Hvilken av utvalgsplanene ville du foretrekke, enkelt tilfeldig utvalg eller stratifisert tilfeldig utvalg? Begrunn svaret.

TABLE A.2 UPPER PERCENTILES OF STUDENT t DISTRIBUTIONS

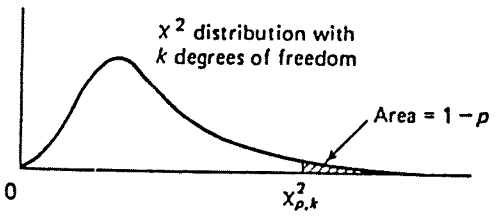


	α						
df	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	0.978	1.250	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	0.941	1.190	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	0.920	1.156	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	0.906	1.134	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	0.896	1.119	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	0.889	1.108	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	0.883	1.100	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	0.879	1.093	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	0.876	1.088	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	0.873	1.083	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	0.870	1.079	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	0.868	1.076	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	0.866	1.074	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	0.865	1.071	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	0.863	1.069	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	0.862	1.067	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	0.861	1.066	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	0.860	1.064	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	0.859	1.063	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	0.858	1.061	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	0.858	1.060	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	0.857	1.059	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	0.856	1.058	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	0.856	1.058	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	0.855	1.057	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	0.855	1.056	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	0.854	1.055	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	0.854	1.055	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
31	0.8535	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.453	2.7441
32	0.8531	1.0536	1.3086	1.6939	2.0370	2.449	2.7385
33	0.8527	1.0531	1.3078	1.6924	2.0345	2.445	2.7333
34	0.8524	1.0526	1.3070	1.6909	2.0323	2.441	2.7284

TABLE A.2 UPPER PERCENTILES OF STUDENT t DISTRIBUTIONS (cont.)

	α						
df	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
35	0.8521	1.0521	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
36	0.8518	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.434	2.7195
37	0.8515	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.431	2.7155
38	0.8512	1.0508	1.3042	1.6860	2.0244	2.428	2.7116
39	0.8510	1.0504	1.3037	1.6849	2.0227	2.426	2.7079
40	0.8507	1.0501	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045
41	0.8505	1.0498	1.3026	1.6829	2.0196	2.421	2.7012
42	0.8503	1.0494	1.3020	1.6820	2.0181	2.418	2.6981
43	0.8501	1.0491	1.3016	1.6811	2.0167	2.416	2.6952
44	0.8499	1.0488	1.3011	1.6802	2.0154	2.414	2.6923
45	0.8497	1.0485	1.3007	1.6794	2.0141	2.412	2.6896
46	0.8495	1.0483	1.3002	1.6787	2.0129	2.410	2.6870
47	0.8494	1.0480	1.2998	1.6779	2.0118	2.408	2.6846
48	0.8492	1.0478	1.2994	1.6772	2.0106	2.406	2.6822
49	0.8490	1.0476	1.2991	1.6766	2.0096	2.405	2.6800
50	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.403	2.6778
51	0.8448	1.0471	1.2984	1.6753	2.0077	2.402	2.6758
52	0.8486	1.0469	1.2981	1.6747	2.0067	2.400	2.6738
53	0.8485	1.0467	1.2978	1.6742	2.0058	2.399	2.6719
54	0.8484	1.0465	1.2975	1.6736	2.0049	2.397	2.6700
55	0.8483	1.0463	1.2972	1.6731	2.0041	2.396	2.6683
56	0.8481	1.0461	1.2969	1.6725	2.0033	2.395	2.6666
57	0.8480	1.0460	1.2967	1.6721	2.0025	2.393	2.6650
58	0.8479	1.0458	1.2964	1.6716	2.0017	2.392	2.6633
59	0.8478	1.0457	1.2962	1.6712	2.0010	2.391	2.6618
60	0.8477	1.0455	1.2959	1.6707	2.0003	2.390	2.6603
61	0.8476	1.0454	1.2957	1.6703	1.9997	2.389	2.6590
62	0.8475	1.0452	1.2954	1.6698	1.9990	2.388	2.6576
63	0.8474	1.0451	1.2952	1.6694	1.9984	2.387	2.6563
64	0.8473	1.0449	1.2950	1.6690	1.9977	2.386	2.6549
65	0.8472	1.0448	1.2948	1.6687	1.9972	2.385	2.6537
66	0.8471	1.0447	1.2945	1.6683	1.9966	2.384	2.6525
67	0.8471	1.0446	1.2944	1.6680	1.9961	2.383	2.6513
68	0.8470	1.0444	1.2942	1.6676	1.9955	2.382	2.6501
69	0.8469	1.0443	1.2940	1.6673	1.9950	2.381	2.6491
70	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9945	2.381	2.6480
71	0.8468	1.0441	1.2936	1.6666	1.9940	2.380	2.6470
72	0.8467	1.0440	1.2934	1.6663	1.9935	2.379	2.6459
73	0.8466	1.0439	1.2933	1.6660	1.9931	2.378	2.6450
74	0.8465	1.0438	1.2931	1.6657	1.9926	2.378	2.6640
75	0.8465	1.0437	1.2930	1.6655	1.9922	2.377	2.6431
76	0.8464	1.0436	1.2928	1.6652	1.9917	2.376	2.6421
77	0.8464	1.0435	1.2927	1.6649	1.9913	2.376	2.6413
78	0.8463	1.0434	1.2925	1.6646	1.9909	2.375	2.6406
79	0.8463	1.0433	1.2924	1.6644	1.9905	2.374	2.6396

TABLE A.3 UPPER AND LOWER PERCENTILES OF X^2 DISTRIBUTIONS



df	p = 0.010	0.025	0.050	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000157	0.000982	0.00393	0.0158	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.336	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.688	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892
31	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486
33	17.073	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061