FORDELINGSTEORI FOR TRANSFORMASJONER AV TILFELDIGE VARIABLE

NOTAT TIL S102

Jan F. Bjørnstad

22. september 1993

1 Funksjoner av en kontinuerlig variabel.

La X være en kontinuerlig tilfeldig variabel med tetthet $f_X(x)$. Vi skal utlede en generell transformasjonsformel for tettheten til $Y = h(X)$ når $h(x)$ er monoton, dvs. enten strengt økende i x for alle x eller strengt avtagende i x for alle x. Det er strengt tatt nok at h er monoton på $\{x : f_X(x) > 0\}$. La nå $\varphi(y)$ være den inverse funksjonen til $y = h(x)$, dvs. $y = h(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$. For eksempel, med $Y = e^X$ så has at: $y = e^x \Leftrightarrow x = \log(y) = \varphi(y)$.

Teorem 1. Sannsynlighetstettheten til Y er gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y))|\varphi'(y)|.$$

Hvis $f_X(x) > 0$ på (a, b) så gjelder:

(i) hvis $h(x)$ er økende i x : $f_Y(y) > 0$ på $(h(a), h(b))$

(ii) hvis $h(x)$ er avtagende i x : $f_Y(y) > 0$ på $(h(b), h(a))$.

Bevis.

(a) Anta h er økende. Da has at

$$F_Y(y) = P(h(X) \le y) = P(X \le \varphi(y)) = F_X(\varphi(y))$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\varphi(y))\varphi'(y) = f_X(\varphi(y))|\varphi'(y)|,$$

siden $\varphi(y)$ er økende i y og dermed $\varphi'(y) > 0$.

(b) Anta h er avtagende. Da får vi at

$$F_Y(y) = P(h(X) \le y) = P(X \ge \varphi(y)) = 1 - F_X(\varphi(y))$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = -f_X(\varphi(y))\varphi'(y) = f_X(\varphi(y))|\varphi'(y)|,$$

siden $\varphi(y)$ er avtagende i y med $\varphi'(y) < 0$. □

Eksempel 1.

$X \sim f_X(x) = e^{-x},\ x > 0$

$Y = 2X + 1 \ \Leftrightarrow\ X = \frac{1}{2}(Y - 1) = \varphi(Y)$

$\varphi'(y) = \frac{1}{2}$ og $f_Y(y) = f_X(\frac{y-1}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y-1)}, y > 1$.

Eksempel 2.

X er Weibull-fordelt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha}mx^{m-1}e^{-x^m/\alpha}, \; x > 0 \;\; \alpha > 0, \; m > 0.$$

$Y = X^m$ er økende for $X > 0$. Dette gir $X = Y^{1/m}$, dvs. $\varphi(y) = y^{1/m}$ og $\varphi'(y) = \frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}$.

Dermed:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y))\frac{1}{m}y^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{\alpha}e^{-y/\alpha}, \; y > 0.$$

Dvs., Y er eksponensielt fordelt.

Eksempel 3.

Anta X er $U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dvs.

$$\begin{aligned} f_X(x) = \tfrac{1}{\pi} &= \text{hvis } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2} \\ &= 0 \text{ ellers.} \end{aligned}$$

La $Y = \tan(X)$.

Fortolkning: X er vinkel på en pil som slår tilfeldig ut og Y er tangens til vinkelen. Her er

$$y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \tan^{-1}(y) = \varphi(y)$$

og $\varphi'(y) = \frac{1}{1+y^2}$. Dette gir

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \text{ hvis } -\infty < y < \infty,$$

dvs. Y er Cauchy-fordelt.

Eksempel 4.

La X være $U(0,1)$ og $Y = -\log(X)$. Siden $y = -\log(x) \Leftrightarrow x = e^{-y}$, $\varphi(y) = e^{-y}$ og $|\varphi'(y)| = e^{-y}$. Dermed

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y))e^{-y} = e^{-y} \text{ hvis } y \geq 0.$$

2 Funksjoner av to kontinuerlige variable.

Vi skal nå se på funksjoner av to variable $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ med simultan tetthet $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, hvor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. La

$$
\left.\begin{array}{l} Y_1 = h_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = h_2(X_1, X_2) \end{array}\right. \quad (\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X}))
$$

Vi skal utlede en generell transformasjonsformel for simultantettheten til $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ for det tilfellet at transformasjonen er en-entydig på $B = \{\mathbf{x} : f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$. La $\mathbf{h}(B) = \{\mathbf{y} : y_i = h_i(\mathbf{x}) \text{ for } i = 1, 2 \text{ og } \mathbf{x} \in B\}$. Tranformasjonen $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ er en-entydig på B hvis for alle $\mathbf{y} \in \mathbf{h}(B)$ det eksisterer bare en $\mathbf{x} \in B$ med $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Vi kan da definere den inverse transformasjonen $\varphi(\mathbf{y}) = (\varphi_1(\mathbf{y}), \varphi_2(\mathbf{y}))$ ved at

$$
\begin{array}{lcl} y_1 = h_1(x_1, x_2) & & x_1 = \varphi_1(y_1, y_2) \\ & \Leftrightarrow & \\ y_2 = h_2(x_1, x_2) & & x_2 = \varphi_2(y_1, y_2) \end{array}
$$

Dvs. vi løser likningssettet $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ med hensyn på $\mathbf{x}$.

Eksempel 5.

$$
\begin{array}{lcl} Y_1 = X_1 + X_2 & & X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = \varphi_1(\mathbf{Y}) \\ & \Leftrightarrow & \\ Y_2 = X_1 - X_2 & & X_2 = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2) = \varphi_2(\mathbf{Y}) \end{array}
$$

Jacobi-determinanten, $J_\varphi(\mathbf{y})$, til (φ_1, φ_2) er definert ved determinanten til matrisen

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}.
$$

I eksempel 5 så blir $J_\varphi(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}$.

Vi skal nå utlede en formel for tettheten $f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2)$ til (Y_1, Y_2) uttrykt ved $f_{\mathbf{X}}$. Den definerende egenskapen til $f_{\mathbf{Y}}$ er:

$$
P(\mathbf{Y} \in D) = \iint_D f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad \text{for alle } D.
$$

For gitt D, la $A = \{\mathbf{x} : h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}) \in D\}$.

Da er $P(\mathbf{Y} \in D) = P(\mathbf{X} \in A) = \iint_A f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Ved variabel substitusjon $\mathrm{x} \to \mathrm{y}$ fås fra integrasjonsteorien at

$$\iint_A f_{\mathrm{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_D f_{\mathrm{X}}(\varphi_1(\mathrm{y})\varphi_2(\mathrm{y}))|J_\varphi(\mathrm{y})| dy_1 dy_2$$

Dette betyr at vi har bevist følgende resultat:

Teorem 2.

(Y_1, Y_2) har simultan sannsynlighetstetthet

$$f_{\mathrm{Y}}(y_1, y_2) = f_{\mathrm{X}}(\varphi_1(\mathrm{y}), \varphi_2(\mathrm{y}))|J_\varphi(\mathrm{y})|.$$

Eksempel 5, forts.

Anta X_1, X_2 er uavhengige og $N(0,1)$, og la

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = X_1 - X_2$$

Da er $\varphi_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ og $\varphi_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$ og $|J_\varphi(\mathrm{y})| = \frac{1}{2}$. Dette gir:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{Y}}(y_1, y_2) &= f_{\mathrm{X}}(\tfrac{y_1+y_2}{2}, \tfrac{y_1-y_2}{2})\tfrac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1+y_2}{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_1-y_2}{2})^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}y_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}y_2^2}. \end{aligned}$$

Dvs. Y_1, Y_2 er uavhengige og $N(0,2)$.

3 En funksjon av to kontinuerlige variable.

Vi skal nå betrakte den situasjonen hvor vi ønsker å finne fordelingen til en funksjon av to variable (X, Y). Vi antar at (X, Y) er kontinuerlig fordelt med simultan tetthet $f(x, y) = f_{X,Y}(x, y)$. La $Z = h(X, Y)$, hvor h har kontinuerlige partielle deriverte av første orden. Dessuten er $h(x, y)$ monoton (økende eller avtaende) i x når y er fast, og tilsvarende som funksjon av y når x er fast.

Dette betyr at ligningen $h(x, y) = z$ bestemmer x entydig som funksjon av y, z. La oss betegne denne funksjonen med φ slik at $X = \varphi(Y, Z)$.

For å finne tettheten til Z, vil vi først utlede simultanfordelingen til (Z, Y). Vi kan da anvende Teorem 2. Situasjonen er følgende:

$$Y_1 = Z = h(X, Y) = h_1$$

$$Y_2 = Y = h_2$$

med invers

$$X = \varphi(Y, Z) = \varphi_1$$

$$Y = Y = \varphi_2$$

Dette gir $f(\varphi_1, \varphi_2) = f(\varphi(y, z), y)$ og

$$J_\varphi(\mathrm{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Dermed har(Z, Y) simultan tetthet

$$g(y, z) = f(\varphi(y, z), y) \cdot \left|\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial z}\right|.$$

Vi har derfor følgende teorem:

Teorem 3.

Tettheten til Z er gitt ved

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(y, z), y) \left|\frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial z}\right| dy$$

Vi skal nå anvende teorem 3 til å finne generelle uttrykk for fordelingene til $X + Y$, XY og X/Y.

Anvendelse 1.

La $Z = X + Y$. Da er $X = Z - Y$ og $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 1$.

Fra teorem 3, $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f((z - y), y) dy$.

Spesielt, hvis X, Y er uavhengige med tettheter f_X og f_Y så er
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) \cdot f_Y(y) dy$. Dette integralet kalles konvolusjonen til f_X, f_Y og betegnes med $f_Z = f_X * f_Y$.

Eksempel 6.

Anta X, Y er uavhengige, begge med tetthet: e^{-x}, $x > 0$. Da er $f(x,y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$ hvis $x > 0$ og $y > 0$.

Tettheten til $Z = X + Y$ blir:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy, \quad \text{hvor}$$

$f_Y(y) = e^{-y}$ hvis $y > 0$, og $f_X(z-y) = e^{-(z-y)}$ hvis $z - y > 0$.

Altså er $f_X(z-y)f_Y(y) > 0$ bare når $0 < y < z$. Dette gir

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-y)} \cdot e^{-y} dy = \int_0^z e^{-z} \cdot dy = ze^{-z}, \text{ hvis } z > 0.$$

Anvendelse 2.

La $Z = XY$. Da er $X = (Z/Y)$, hvilket gir at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1/y \text{ og}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z/y, y) |\frac{1}{y}| dy.$$

Eksempel 7.

(X, Y) har tetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{hvis} \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da blir

$$f(z/y, y) = (z/y) + y \text{ hvis } 0 < z/y < 1 \text{ og } 0 < y < 1$$

dvs. hvis $z < y < 1$. Dette gir at tettheten til $Z = XY$ blir, for $0 < z < 1$:

$$f_Z(z) = \int_z^1 (\frac{z}{y} + y)\frac{1}{y} dy = \int_z^1 (1 + z \cdot y^{-2}) dy = 2(1-z), \; 0 < z < 1.$$

Anvendelse 3.

La $Z = X/Y$. Da er $X = ZY = \varphi(Z, Y)$ og $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y$, slik at

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(zy, y)|y| dy$$

Eksempel 8.

X, Y er levetidene til to lyspærer. Det antas at X, Y er uavhengige, med tettheter

$$f_X(x) = e^x \quad \text{hvis } x \geq 0$$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y} \quad \text{hvis } y \geq 0$$

Dette medfører at $E(X) = 1$ og $E(Y) = 1/2$.

$Z = X/Y$ er forholdet mellom levetidene. For $z > 0$:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty f_X(zy) f_Y(y) y dy = \int_0^\infty 2y e^{-zy-2y} dy.$$

La $t = (z+2)y$, og vi får:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{2t}{(z+2)} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{(z+2)} \cdot dt = \frac{2}{(z+2)^2}\Gamma(2) = 2/(z+2)^2.$$

Dvs.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= 2/(z+2)^2 \text{ hvis } z > 0 \\ &= \quad 0 \text{ ellers} \end{aligned}$$

Vi har at

$$E(Z) = \int_0^\infty \frac{2z}{(z+2)^2} dz = 2[_0^\infty(\ln(z+2) - \frac{z}{z+2}) = \infty.$$