Levetidsanalyse 2001.

Diverse oppgaver (med løsningsforlag):

- Pålitelighetsanalyse 2, mai '87. Oppg 2 & 3
- Øvingsoppgave - Estimering og testing i telleprosesser.
- Løsning på oppgave 11.5 fra læreboka.

Fra Pålitelighetsanalyse 2 Mai 87

Oppgave 2.

a)

Cox-modellen for sviktintensiteten til en enhet kan skrives på formen

$$z(t;\underline{x}) = z_0(t)\ \exp(\underline{x}\ \underline{\beta}). \qquad (0)$$

Vis at (0) medfører at overlevelsessannsynligheten kan skrives på formen

$$S(t;\underline{x}) = S_0(t)^{\exp(\underline{x}\ \underline{\beta})}$$

b)

Parametrene $\underline{\beta}$ i Cox-modellen estimeres ved å maksimere følgende uttrykk mhp $\underline{\beta}$:

2

$$L(\underline{\beta}) = \prod_{i=1}^{k} e^{\underline{s}_i \underline{\beta}} \;/\; \Big(\sum_{j \in R_i} e^{\underline{x}_j \underline{\beta}} \Big)^{d_i}$$

Forklar hva symbolene i uttrykket står for.

Gi kort en motivering for uttrykket, for det tilfelle at en ikke har sammenfallende observasjoner (levetider).

c)

I den generaliserte Eyringmodellen skrives reaksjonshastigheten på formen

$$c = AT[\exp(-B/(KT))][\exp(CV + DV/(KT))] \qquad (1)$$

hvor

c er reaksjonshastigheten
T er absolutt temperatur
V er en ikke-termisk stressor (f.eks elektrisk spenning)
K er Boltzmanns konstant
A, B, C, D er parametre som må estimeres.

En bestemt type transistorer degraderes ved en kjemisk reaksjon, med en hastighet som antas å følge (1). En antar på denne bakgrunn at transistorenes sviktintensitet $z(t;T,V)$ er proporsjonal med (1).

Skriv sviktintensiteten på formen

$$z(t;\underline{x}) = z_0(t)\exp(\underline{x}\,\underline{\beta})$$

hvor $\underline{x}$ er fullstendig spesifiserte funksjoner av T og V, og $\underline{\beta}$ er fullstendig spesifiserte funksjoner av parametrene i (1).

3

d)

En akselerert levetidstest av transistorene skal foretas.
I tillegg til temperatur og spenning, ønsker en å undersøke hvordan levetidsfordelingen avhenger av relativ luftfuktighet. En vil bare teste ved 20% og ved 70% relativ fuktighet.

Foreslå en utvidelse av modellen fra c) til å også inneholde relativ fuktighet.
Skriv ned de antakelsene du gjør underveis.

<u>Oppgave 3.</u>

For en viss komponent har en følgende datamateriale fra oljeplattformer i Nordsjøen:

Plattform	Tid i funksjon (timer)	Antall feil
1	665 760	51
2	665 760	69
3	420 480	55
4	350 400	45
Totalt	2 102 400	220

Under visse forutsetninger er det rimelig å anta at totalt antall feil S er Poisson-fordelt,

$$f(s|\lambda) = \frac{(\lambda t)^s e^{-\lambda t}}{s!}$$

hvor t er total tid i funksjon.

a)

Hva er tolkningen av λ?
Gjør rede for hvorledes du finner den konjugerte apriorifordeling for λ i dette tilfellet.
Hvilken fordelingsklasse tilhører den?

b)

Gjør rede for hvorledes en ut fra apriori kunnskap kan gå frem for å anslå parameteren i apriorifordelingen.

c)

Anta at en har funnet frem til en apriorifordeling av formen

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \qquad ; \qquad \lambda > 0$$

hvor α og β er gitte konstanter.
Hva blir aposteriorifordelingen?
Diskuter den relative betydning av data og apriorifordeling i aposteriorifordelingen.

d)

Anta at $\alpha = 5$ og $\beta = 10^5$ i apriorifordelingen.
Finn Bayesestimatoren for λ.
Finn også et Bayesiansk sannsynlighetsintervall med sannsynlighet 0.95.

<u>Oppgave 4.</u>
Definer Mellintransformen.
Hvorfor er denne nyttig for å studere et system av komponenter?

Stian Lydersen 1987-05-14

Løsningsforslag,
eksamen pålitelighetsanalyse II, 22 mai 1987.

Oppgave 2

a)

$$S(t,\underline{x}) = \exp[-\int_0^t z(u,\underline{x})du]$$

$$= \exp[-\int_0^t z_0(u)\exp(\underline{\beta}\ \underline{x})du]$$

$$= \exp[-\int_0^t z_0(u)du\cdot\exp(\underline{\beta}\ \underline{x})]$$

$$= \{\exp[-\int_0^t z_0(u)du]\}^{\exp(\underline{\beta}\ \underline{x})}$$

$$= S_0(t)^{\exp(\underline{\beta}\ \underline{x})}$$

b)

$L(\underline{\beta})$ er "likelihood funksjonen"
$\underline{\beta}$ er parametrene i Cox-modellen
k er antall forskjellige svikttider i datamaterialet
$\underline{S}_i$ er summen av stress-vektorene for de enhetene son har svikttid lik t_i
$\underline{x}_l$ er stress-vektoren for enhet l
d_i er antall enheter som har svikttid lik t_i
R_i er risikomengden ved tid t_i. Dette er mengden av enheter som "lever" og er usensurert like før t_i, dvs de enhetene hvor verken svikttid eller sensurtid er (ekte) mindre enn t_i.

Motivering: Nederst side 345 i Lawless, alternativt en av motiveringene i avsnitt 7.2.3 side 354,->.

c)

Konstanten A kan tenkes "innbakt" i $z_0(t)$. Vi kan da skrive

$$z(t;T,V) = z_0(t)\ T[\exp(-B/(KT))][\exp(CV + DV/(KT))]$$

$$= z_0(t) \exp[\log(T) - B/(KT) + CV + DV/(KT))]$$

$$= z_0(t) \exp[\ x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4\ ]$$

hvor

$x_1 = \log(T)$
$x_2 = 1/T$
$x_3 = V$
$x_4 = V/T$

$\beta_1 = 1$
$\beta_2 = -B/K$
$\beta_3 = C$
$\beta_4 = D/K$

d)

Siden vi bare vil studere to fuktighetsnivå, innfører vi indikator-variablelen

$x_5 = 0$ hvis 20% relativ fuktighet
$= 1$ hvis 70% relativ fuktighet

Vi antar at relativ fuktighet, H, har en multiplikativ effekt på sviktintensiteten. Videre antar vi at det ikke er noen interaksjons-effekt mellom fuktighet og noen av de andre stressorene på disse nivåene. Modellen kan da skrives på Cox-form:

$$z(t;T,V,H) = z(t;T,V)\exp(x_5\beta_5)$$

$$= z_0(t) \exp[\ x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + x_5\beta_5\ ]. \qquad \text{(i)}$$

Her er β_5 en parameter som må estimeres, og de andre størrelsene er som definert ovenfor.

e)

Splitt datasettet i to, med hhv H =20% og H = 70%. Tilpass modellen

$$z_{(i)}(t;\underline{x}') = z_{0,(i)}(t)\exp(\underline{x}'\,\underline{\beta}'), \qquad i=0,1 \qquad \text{(ii)}$$

til hvert av de to datasettene, hvor

$$\underline{x}' = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

og

$$\underline{\beta}' = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4).$$

For hvert av de to datasettene fås dermed estimat for $\underline{\beta}'$, og estimat $S_{0,(i)}(t)$ for $S_{0,(i)}(t)$.

Hvis modellen (i) er korrekt, så er

$$z_{(i)}(t;\underline{x}') = z(t;\underline{x}',x_5)$$

$$= z_0(t)\exp(\underline{x}\,\underline{\beta}), \qquad i = 0,1. \qquad \text{(iii)}$$

Det følger av (ii) og (iii) at

$$z_{0,(0)}(t) = z_{0,(1)}(t)\exp(\beta_5).$$

Dette medfører på samme måte som i deloppgave a):

$$S_{0,(0)}(t) = S_{0,(1)}(t)^{\exp(\beta_5)}$$

eller

$$\log\{-\log[S_{0,(0)}(t)]\} = \beta_5 + \log\{-\log[S_{0,(1)}(t)]\}.$$

Plott $\log\{-\log[\hat{S}_{0,(0)}(t)]\}$ og $\log\{-\log[\hat{S}_{0,(1)}(t)]\}$ i samme koordinatsystem. hvis antakelsen om multiplikativ effekt holder, så bør de to plottene være omtrent parallelle. Estimatene for $\underline{\beta}'$ basert på de to datasettene bør helle ikke være for mye forskjellige.

f)

Bruk en stratifisert (stratified) Cox modell, dvs modellen (ii).

LØSNING OPPGAVE 3 Mai '87

c) Aposteriorifordelingen blir gamma$(\alpha+s, \beta+t)$ hvor

$$s = 220 \quad \& \quad t = 2\,102\,400$$

Bayesestimatoren er

$$E(\Lambda | s) = \frac{\alpha+s}{\beta+t} = \frac{5+220}{100\,000+2\,102\,400}$$

$$= 1{,}022 \cdot 10^{-4}$$

Konfidensintervall:

$$2\Lambda(\beta+t) \quad \text{er} \quad \chi^2(2(\underset{5}{\alpha}+\underset{220}{s}))$$

$$P\left[\frac{\chi^2_{0.025}(450)}{4404800} \le \Lambda \le \frac{\chi^2_{0.975}(450)}{4\,404800}\right]$$

Tabell B3

$$\left[\frac{393.114}{4\,404800}, \quad \frac{510.670}{4\,404800}\right]$$

$$\left[0.89 \cdot 10^{-4}, \quad 1.16 \cdot 10^{-4}\right]$$

d) Negativ log gammafordeling, $NLG\left(\alpha+s, \frac{\beta+t}{t_0}\right)$

Aposteriori forventning er

$$\left(\frac{\beta+t}{\beta+t+t_0}\right)^{\alpha+s} = \left(\frac{2\,202\,400}{2\,202\,400+20000}\right)^{225} = 0.13$$

Intervall

$$\left[e^{-20000 \cdot 1.16 \cdot 10^{-4}}, \quad e^{-20000 \cdot 0.89 \cdot 10^{-4}}\right]$$

$$= [0.098, \quad 0.17]$$

Øvingsoppgave - Estimering og testing i telleprosesser.

We have failure data for two pumps of the same type. The following failure times are observed (in days after start):

Pump 1: 250, 320, 400, 470, 520
Pump 2: 170, 280, 380, 490

a. Assume (in a.-f.) that the two pumps have the same ROCOF. Draw the Nelson-Aalen plot for the data. Carry out the Laplace test and conclude.

b. A parametric model is formulated by specifying that mean number of failures of one pump up to time t is given by the expression $W(t) = \lambda \cdot t^{\beta}$. Find the ROCOF and specify the name given to this model.

c. Assume that the two pumps are observed up to day $\tau = 550$ after start. Write down the likelihood of the data, given the model specified in b.

d. Find the maximum likelihood estimates (MLE) for λ and β. In particular show that the MLE of β equals

$$\beta^* = \frac{N(\tau)}{N(\tau) \cdot \ln(\tau) - \sum_{i=1}^{N(\tau)} \ln(S_i)} = \frac{N(\tau)}{-\sum_{i=1}^{N(\tau)} \ln(S_i / \tau)}$$

e. Draw the estimated curve for mean number of failures, $W(t)$, in the same diagram as the Nelson-Aalen plot.

f. Now formulate and test the hypothesis of having no trend in the data.

g. Now normalise the time scale so that $\tau = 1$ (=550 days). What are the resulting expressions for λ^* and β^*? Show that λ^* and β^* now are asymptotically independent with $\text{Var}(\lambda^*) \approx (\lambda^*)^2 / N(\tau)$ and $\text{Var}(\beta^*) \approx (\beta^*)^2 / N(\tau)$.

h. It has been claimed that Pumps 1 and 2 have different ROCOFs. How would you test whether the data supports such a claim? Indicate two different approaches:
1) Using the likelihood ratio test
2) Using the results of point g. above

Løsningsforslag. Øvingsoppgave - Estimering og testing i telleprosesser.

a. H_0: Ikke trend (konstant ROCOF) mot H_1: Voksende eller avtakende trend. Bruker 5% signifikansnivå. Beregner:

$$\tfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} S_i = 2760.$$

som gir testobservator, U = 1.60, som hverken er større enn 1.96 eller mindre enn -1.96. Dvs observasjonene gir ikke grunn til å hevde at det er trend. (Siden U>0 *indikerer* dataene en voksende trend).

b. Power-law modell: ROCOF, $w(t) = \lambda\beta \cdot t^{\beta-1}$.

c. Når vi tar hensyn til at vi har data fra *to* pumper blir *likelihood*:

$$l_\tau(\lambda, \beta) = (\lambda \cdot \beta)^{N(\tau)} \cdot [S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \quad \cdot S_{N(\tau)}]^{\beta-1} \cdot \exp(-2\lambda\tau^{\beta})$$

(Starter med å skrive ut *likelihood* for data fra pumpe 1 og 2 separat, og multipliserer så sammen disse.)

d. Får $\beta^* \approx 2.145$ og $\lambda^* = N(\tau) / (2 \cdot \tau^{\beta^*}) \approx 0.6 \cdot 10^{-5}$.

f. Test H_0: $\beta = 1$ mot H_1: $\beta \neq 1$

Bruk Sannsynlighetskvotetesten. Loglikelihood innsatt SME er

$L_\tau(\lambda^*, \beta^*) = N(\tau) \cdot [\ln(\lambda^*) + \ln(\beta^*)] + (\beta^*-1) \cdot \Sigma \ln(S_i) - N(\tau) \approx -50.13$

Under nullhypotesen er SME for λ lik $\hat{\lambda} \approx 0.0082$ og Loglikelihood blir

$L_\tau(\hat{\lambda}, 1) \approx -52.23$.

Testobservatoren blir $W = 2(L_t(\lambda^*, \beta^*) - L_t(\hat{\lambda}, 1)) \approx 4.2 > 5\%$ kvantilen i χ^2 fordelingen med 1 frihetsgrad. Dvs nå forkastes H_0 og vi kan hevde at det er trend.

g. I den nye skaleringen erstattes τ med 1, samtidig som observerte feiltider settes lik $S_i' = S_i / 550$ i *likelihood*-funksjonen. Tilsvarende for β^* og λ^*; (merk at nå blir $\lambda^* = N(\tau)/2$, mens *verdien* av β^* blir uendret). Resultatet følger ved å finne de annenderiverte til (den "nye") loglikelihood-funksjonen, og innsette "nye" β^* og λ^* (husk sammenheng mellom annenderiverte og asymptotisk varians-covarians-matrise) Merk resultatet her gjelder uansett om vi har data fra én eller to pumper.

h. Hvis en er usikker på begge parametre innføres β_i og λ_i, $i = 1, 2$, som parametrene for henholdsvis pumpe 1 og 2. (Alternativt kan f.eks. λ fremdeles antas å være den samme for begge pumper.)

Test H_0: $\beta_1 = \beta_2$ og $\lambda_1 = \lambda_2$ mot H_1: $\beta_1 \neq \beta_2$ og/eller $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Setter opp ny *likelihood*-funksjon $L_\tau(\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2)$ og finner SME for de *fire* parametrene. Forkast H_0 hvis

$W = 2 \cdot [L_\tau(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*) - L_\tau(\lambda^*, \beta^*)] > \gamma$ - kvantil i χ^2- fordeling med to frihetsgrader.

Alternativt, forkast hvis

$W^* = (\beta_1^*-\beta_2^*)^2 / [\mathrm{Var}(\beta_1^*) + \mathrm{Var}(\beta_2^*)]^2 + (\lambda_1^*-\lambda_2^*)^2 / [\mathrm{Var}(\lambda_1^*) + \mathrm{Var}(\lambda_2^*)]^2 >$ γ-kvantil i χ^2- fordeling med to frihetsgrader.

Høyland & Rausand Chapter 11.9

Problem 11.5

a) In this situation we use Eq. (11.30) page 446 in the book. That is, the posterior distribution is gamma distributed with parameters $\alpha' = \alpha + n = 3 + 19$, and $\beta' = \beta + t = 30{,}000 + 36{,}000 \times 7$. (Note that α and β has been interchanged in the problem).

Under the assumption of a quadratic loss function, the Bayes estimate for λ is given as the mean of the posterior distribution, i.e.

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha + n}{\beta + t} = \frac{3+19}{30{,}000+36{,}000\times 7} = 7.8\times 10^{-5}$$

In fact, we are seeking the MTTF, and not λ. Approximately we may use the reciprocal of $\hat{\lambda}$ as an estimator for MTTF, but we can do even better by using Eq. 11.50 in the text book, i.e.

$$\hat{\theta} = \frac{\beta + t}{n + \alpha - 1} = \frac{30{,}000+36{,}000\times 7}{19+3-1} = 13\ 428$$

b) Let R denote the reliability at s = 10,000 kilometre. Because λ is not known exactly, also $R = e^{-\lambda s}$ is uncertain, i.e. a random quantity. We are here seeking an r such that

$$P(R > r) = 0.9$$

$$\Rightarrow P(\Lambda > -(\ln r)/s) = 0.9$$

Now realizing that the posterior of Λ is gamma distributed with parameters α' = 22 and β' = 282,000, $Z = 2\beta'\Lambda$ is χ^2 distributed with $2\alpha'$ degrees of freedom. I.e.

$$P(2\alpha'\Lambda > -2\alpha'(\ln r)/s) = 0.9$$

$\Rightarrow -2\alpha'(\ln r)/s = z_{0.9,2\alpha'} = \cancel{56.47}$ 32.5? (need to interpolate and extrapolate in the table p. 493 in the textbook.)

$$\Rightarrow r = e^{-s z_{0.9,2\alpha'}/(2\beta')} = 0.37 \quad ?$$