Levetidsanalyse 2001:

Eksamensoppgaver i Pålitelighetsanalyse (med løsningsforlag):

August '92,	oppg. 3
Mai '91,	oppg. 2
August '95,	oppg. 1 & 3
August '94	oppg 1
Mai '92,	oppg. 3
Juni '94,	oppg. 1 & 3
Juni '95,	oppg. 1 & 3 (uten løsning)

August 92

Oppgave 3

Levetidene til n = 8 identiske varmevekslere er registrert. Disse levetidene betegnes $X_1, X_2, \ldots, X_8$, og antas å være uavhengige med samme kontinuerlige fordeling. Fordelingsfunksjonen betegnes $F(t)$. De ordnede observasjonene betegnes $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(8)}$.

a. Datamaterialet (i 10^3 timer) er

12, 28, 41, 83, 102, 160, 236, 305.

Definer T(x) = den totale resttid ved tidspunkt x. Tegn TTT-plottet for observasjonsmaterialet.

b. TTT transformen til fordelingen F er definert ved

$$H_F^{-1}(v) = \int_0^{F^{-1}(v)} (1 - F(u))du$$

Presiser fortolkningen av $F^{-1}(v)$ i dette uttrykket, og utled sammenhengen mellom $H_F^{-1}(1)$ og forventningen i fordelingen. Definer den skalerte TTT-transformen.

c. Utled den skalerte TTT-transformen for eksponensialfordelingen.

d. La $H_n^{-1}(v)$ være definert som TTT-transformen, med den forskjell at $F(\cdot)$ nå er byttet ut med den empiriske fordelingsfunksjonen. Hva er $F_n^{-1}(i/n)$? Vis at $H_n^{-1}(i/n) = T(X_{(i)})/n$.

e. Bruk resultatene funnet over til å argumentere for at levetidene i a) er hentet fra en eksponensialfordeling. Estimer sviktintensiteten i fordelingen, og utled et konfidensintervall for denne.

Oppgave 2

Levetidsfordelingen til en bestemt type kuleventil skal undersøkes ved å sette n enheter i drift, og registrere tidene $t_1, t_2, \ldots, t_n$ til de svikter. Anta at levetidene er uavhengige.

Observasjonsmaterialet for 10 ventiler ble som følger (levetider i dager):

326, 207, 996, 357, 1, 67, 232, 84, 133, 91

a) Anta at levetiden for en ventil er eksponensialfordelt. Finn et estimat og et 90% konfidensintervall for sviktintensiteten λ basert på datasettet.

b) En Bayesianer betrakter problemet fra følgende synsvinkel: Alle ventilene har uavhengige, eksponensialfordelte levetider med samme λ, hvor λ sees på som en realisasjon av en stokastisk variabel Λ. Denne Bayesianerens apriori-informasjon er representert ved en gammafordeling med parametre α og β, dvs

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \qquad \lambda>0, \quad \alpha>0, \quad \beta>0.$$

Forventningsverdien i apriorifordelingen er $E(\Lambda) = \alpha/\beta$.

Vis at aposteriorifordelingen er en gammafordeling med parametre α' og β', hvor

$$\alpha' = \alpha + n, \quad og \quad \beta' = \beta + \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Hva blir Bayes-estimatoren (ved minimum kvadratisk tap) λ^* for λ? Hvilket estimat fås når parametrene i apriorifordelingen settes til $\alpha = 0.5$ og $\beta = 300$?

1991-05-16
SL/-

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Eksamen i fag 75582 Pålitelighetsanalyse

Torsdag 24. august 1995
Tid 0900-1300

Faglig kontakt: Per Hokstad (735)92754

Hjelpemidler:
Godkjent kalkulator
Samset&Thorvaldsen: Statistiske tabeller og formler

Oppgave 1

En setter n komponenter i funksjon samtidig, og levetidene til disse komponentene, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og identisk kontinuerlig fordelte. Når levetidene ordnes etter størrelse fås ordningsobservatoren $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$.

a) Definer "total test tid", $T(x)$, ved tid x. Skriv spesielt ut $T(X_{(r)})$.

En har bestemt seg for å avslutte forsøket i det øyeblikk feil nr. r inntreffer, og får dermed sensurerte data. Anta at levetidene, X_i, $i=1,2$ ..., er eksponensialfordelte med parameter λ. Foreslå en punktestimator for λ (egenskapene kreves ikke). Utled et 90% konfidensintervall, basert på at $2\lambda T(X_{(r)})$ er kjikvadratfordelt med $2r$ frihetsgrader. Utled intervallet når $r=n=6$, og observasjonene er (i år)

1.1, 1.7, 1.9, 2.4, 2.7, 3.2

b) Utled Bayes estimatoren for λ for det tilfelle at $r=n$ (anta kvadratisk tapsfunksjon). Som a priorifordeling benyttes gammafordelingen (k, θ) som generelt har sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \frac{\theta}{\Gamma(k)}(\theta t)^{k-1}e^{-\theta t} \quad t \geq 0$$

og forventning k/θ. Beregn estimatet for λ når $k=2$ og $\theta=5$ år^{-1}. Vis at Bayes estimatoren kan skrives som en veiet sum av "a priori estimatet" og av en estimator basert på forsøket.

Aug. 95

Oppgave 3

a) La X_1 og X_2 være uavhengige og eksponensialfordelte med parametre henholdsvis, λ_1 og λ_2. Hva er fordelingen til $\min(X_1, X_2)$? Vis at $P(X_1<X_2) = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b) Betrakt et system av 2 pumper med passiv redundans ("standby"). Pumpe A er innkoplet først, og har sviktintensitet λ_1. Pumpe B står i standby og har da sviktintensitet λ_0. De to pumpene svikter uavhengig av hverandre. I det øyeblikk A svikter koples B inn, og B får da en sviktintensitet λ_2. For at denne omkoplingen skal funksjonere er det bruk for en omkoplingsenhet, og denne svikter med en konstant sviktintensitet λ_S.

La T_1 angi tid til pumpe A feiler. La videre T_2 være tiden som går fra dette skjer til pumpe B feiler, slik at tid til systemsvikt (dvs. ingen pumpe er tilgjengelig) kan skrives $T = T_1 + T_2$. Bestem sannsynligheten for at $T_2 = 0$, og oppgi betinget forventning for T_2, gitt $T_2>0$. Finn så MTTF = E(T).

c) Anta nå at en bruker et system av tre pumper, som alle har kapasitet 50%, dvs minst to pumper må operere for at systemet skal funksjonere. En starter med at alle tre pumpene er aktive. Det er ikke behov for noen omkoplingsenhet ved første pumpe-feil. Alle tre pumper feiler uavhengig av hverandre med sviktintensitet λ, både når det er to og tre pumper som er aktive. Forklar at tid til systemfeil kan skrives $T = T_1 + T_2$, der T_1 er tid til første pumpe-feil. Definer også T_2, og bruk nå dette til direkte å finne MTTF = E(T) for systemet. Utled også fordelingsfunksjonen for tid til systemfeil, og sjekk at dette gir den samme MTTF.

....

NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

/cw 2

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hokstad (7359)2754

EKSAMEN I FAG 75582 PÅLITELIGHETSANALYSE

Mandag 22. august 1994
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator.
Samset & Thorvaldsen: Statistiske tabeller og formler.

Oppgave 1

Vi har n identiske komponenter som settes i drift, og lar $X_1, X_2, ..., X_n$ være de observerte levetider, dvs. tid fram til svikt eller sensurering. Tider til svikt antas uavhengige og identisk fordelte. Sensureringstidspunktene kan også oppfattes som uavhengige stokastiske variable.

a) Definer hazard-plottet (Nelson-plottet) for datasettet. Forklar hvordan dette plottet kan brukes til å sjekke om den underliggende levetidsfordelingen er IFR eller DFR.

b) La n=9, og konstruer hazard-plottet for følgende datasett (levetid i dager).

80, 140, 210, 480, 530*, 790, 1210, 1540, 1850*

Observasjonene 5 og 9 (merket med "*") svarer til sensureringstidspunkter. Hvilken konklusjon vil du trekke ut fra dette plottet?

c) Anta at de 7 observerte tider til svikt er uavhengige og eksponensialfordelte med sviktintensitet λ. (For enkelhets skyld vil vi i det følgende se bort fra den informasjonen som er gitt av de to sensurerte levetidene). En Bayesianer vil estimere λ, og modellerer sin a priori viten ved en gamma fordeling (α, β)

$$f(\lambda) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta\lambda)^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda} \qquad \lambda>0;\ \alpha>0,\ \beta>0$$

Forventningen i denne gamma-fordelingen er $E(\Lambda) = \alpha/\beta$.

Finn a posteriori fordelingen til λ. Hva blir Bayes estimatoren for λ under forutsetningen om kvadratisk tapsfunksjon? Hvilken estimator får vi for λ (uttrykt ved α og β), når vi utelukkende baserer oss på a priori viten . Angi også den "vanlige" estimatoren for λ, utelukkende basert på de observerte levetidene. Vis at Bayes estimatoren kan skrives som en veiet sum av disse to estimatorene.

d) Ifølge Bayesianerens a priori viten forventet han at en komponent i gjennomsnitt skal funksjonere i tre år før svikt inntreffer. Han mener at denne a priori viten er omtrent like sikker som om den var basert på tre virkelig observerte levetider. Bruk de 7 observerte svikttider gitt i b) til å beregn Bayes estimatet for λ.

Mai 92

Oppgave 3

a. Levetiden, T, til en trykkmåler modelleres som en kontinuerlig stokastisk variabel med funksjonssannsynlighet $R(t) = P(T > t)$. Vis at $E(T) = \int_0^\infty R(t)dt$.

Definer kumulativ sviktintensitet, $Z(t)$, og utled sammenhengen mellom $Z(t)$ og $R(t)$. Hva er definisjonen på at fordelingen til T har ikke-avtakende sviktintensitet (IFR)? Gi en alternativ definisjon, uttrykt ved $R(t)$, og som kan brukes selv om fordelingen til T ikke er kontinuerlig.

b. Anta at T er Weibull-fordelt, dvs.

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad , \quad t > 0 .$$

Finn $E(T)$. Hva er betingelsen for at T har en ikke-avtakende sviktintensitet? Finn $Z(t)$. Transformer henholdsvis $Z(t)$ og t over i variable som det er en lineær sammenheng mellom.

c. Ti like trykkmålere ble installert samtidig. Den ene ble tatt ut av drift etter 1020 dager uten å ha feilet. For de øvrige ni observerte en følgende tid til svikt (i dager):

1480, 2166, 2552, 2818, 3043, 3427, 3785, 4241, 5112.

Finn Nelsons estimat for den kummulative sviktintensiteten. Hva blir estimatet for $R(t)$? Tegn Nelson-plottet på Weibull papir (vedlagt). Bruk dette til å estimere parametrene i Weibull-fordelingen.

Juni 94

Oppgave 1

a) TTT-transformen til fordelingsfunksjonen F er definert ved

$$H_F^{-1}(V) = \int_0^{F^{-1}(V)} (1 - F(u))\, du$$

Presisér fortolkningen av $F^{-1}(V)$ i dette uttrykket, og utled sammenhengen mellom $H_F^{-1}(1)$ og forventningen i fordelingen. Definer den skalerte TTT-transformen.

b) Utled den skalerte TTT-transformen for eksponensialfordelingen.

Levetidene til $n = 9$ identiske komponenter er registrert. Disse levetidene betegnes $X_1, X_2, \ldots, X_9$, og antas å være uavhengige med samme kontinuerlige fordeling.

c) Datamaterialet (i dager) er

80, 140, 210, 480, 530, 790, 1210, 1540, 1850.

Definer $T(x)$ = den totale test tid ved tidspunkt x. Tegn TTT-plottet for observasjonsmaterialet. Hvilke slutninger vil du trekke av dette plottet?

Juni 94

Oppgave 3

Bruk i denne oppgaven at gammafordelingen (k, θ) har sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \frac{\theta}{\Gamma(k)} (\theta t)^{k-1} e^{-\theta t}; \quad t \geq 0$$

og forventning, $E(T) = k/\theta$.

a) Levetiden, T (i år) til en komponent har sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}; \quad t \geq 0$$

Hva er forventingen til T? En har n observasjoner, $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Foreslå en estimator (f.eks. sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren) for λ. Egenskapene til estimatoren forlanges ikke. Beregn estimatet når $n = 4$ og $T_i = 3.5, 5.2, 6.8, 7.3$ (år).

En hadde også en del a priori kunnskap om λ, og ut fra denne kunnskapen alene hadde en estimert $E(T)$ til 10 år. Foreslå også et "a priori estimat" for λ.

b) Nå skal λ estimeres ved Bayes-teknikken. Den subjektive a priori viten om λ uttrykkes ved en a priori fordeling av formen

$$g(\lambda) = \alpha^2 \lambda e^{-\alpha\lambda}; \quad \lambda \geq 0$$

Hvilken verdi bør en velge for α her?

Finn også a posteriori fordelingen til λ. Hva blir Bayes estimatoren for λ under forutsetningen om kvadratisk tapsfunksjon? Beregn estimatet med de data som er gitt i a), og sammenlikn med de estimatene som ble funnet der. Kan en si noe om hva a priori informasjonen om λ (gitt ved $g(\lambda)$) svarer til, når en sammenlikner med informasjonen i observerte levetider?

Juni 95

Oppgave 1

La den stokastisk variable, X, betegne levetiden til en bestemt komponenttype, og la X ha funksjonssansynlighet, R(x) = P(X>x).

a) Utled sammenhengen mellom forventningen til X og R(x).

En har observert 8 levetider av denne komponenttypen (i måneder):

37.0, 82.5, 110.0, 62.0, 51.5, 94.5, 18.0, 74.5

Bruk disse data til å estimere funksjonsannsynligheten (basert på den empiriske fordelingsfunksjon).

b) Hva menes med sensurerte levetidsdata. Definer kort de fire hovedtyper av sensurering. Presiser den sensureringdmodell som Kaplan-Meier bruker i sin estimator for R(x).

c) Anta at vi har to sensurerte levetider, i tillegg til de 8 observasjonene gitt i a):

48.0, 60.0

Finn ut fra dette Kaplan-Meier estimatoren for R(x) og skisser denne. Beregn et estimat for forventningen til X.

Juni 95

Oppgave 3

En pumpe benyttes ikke kontinuerlig, og har en sannsynlighet, p, for ikke å starte når den skal tas i bruk. Anta at det har vært bruk for pumpa n ganger, og la X være antall ganger den ikke starter (tilstrekkelig raskt). Det antas at X er binomisk fordelt.

a) Observasjonen, X, skal brukes til å estimere p, ved hjelp av Bayes-teknikken. A priori fordelingen til p velges fra klassen av beta fordelinger, dvs.

$$g(p) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\cdot\Gamma(s)} p^{r-1}(1-p)^{s-1}, \qquad 0 \leq p \leq 1;\ r>0,\ s>0$$

I fortsettelsen kan du, uten bevis, bruke at forventningen i denne fordelingen er r/(r+s).

Utled uttrykket for Bayes estimatoren (når kvadratisk tapsfunksjon benyttes).

b) A priori vil statistikeren (ut fra erfaring med tilsvarende pumper) anslå p til å være omtrent 1/20. Videre anser han denne informasjonen til å være likeverdig med å ha observert 20 starter av den aktuelle pumpa. Bruk dette til å spesifisere a priori fordelingen for p.

Anta at vi har observert n = 143 starter, og at X = 4. Hva blir Bayes estimatet? Sammenlikn med resultatet som fås ved å bruke den vanlige sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME).

En annen statistiker hevder at det er uheldig å bruke den subjektive a priori informasjonen om at p antas å være omtrent 1/20. Han mener at det bør brukes en såkalt "ikke-informativ" a priori fordeling. Foreslå en slik fordeling, og beregn den tilhørende estimatoren. Sammenlikn med det andre Bayes estimatet og SME, og kommenter. Hvilket av de to Bayes estimatene ville du selv anbefale i bruk?

Løsning på en del Eksopg. i pål. analyse

Aug 92, oppg 3

3a

i	$X_{(i)}$	$T(X_{(i)})/T(X_{(n)})$
1	12	0.099
2	28	0.215
3	41	0.296
4	83	0.513
5	102	0.592
6	160	0.771
7	236	0.928
8	305	1.0

3b

$F^{-1}(v) \sim (1-v)$ - kvantil

$F^{-1}(1) = \infty$

$H_F^{-1}(1) = \int_0^\infty R(u)\,du = E(X)$

3c Skalert TTT for eksponensialfordeling $= v$, $v \in (0,1)$

3d

$F_n^{-1}(i/n) = X_{(i)}$

$H_n^{-1}(i/n) = \frac{1}{n} T(X_{(i)})$ (Theorem 9.4)

3.e Kombiner

$\rightarrow$ $H_n^{-1} \approx H_F^{-1}$ (TTT plott $\approx$ TTT-transform)

$\rightarrow$ $H_F^{-1}(v)$ rett linje for exponenf. (3c)

$\rightarrow$ TTT plott for data $\approx$ rett linje (3a)

$\Longmapsto$ Data eksponensialfordeling

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T(X_{(n)})} = \frac{8}{967}\,10^{-3} = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{ per time}$$

$$\frac{\chi^2_{1-\varepsilon/2,\,2n}}{2\,T(X_{(n)})} < \lambda < \frac{\chi^2_{\varepsilon/2,\,2n}}{2\,T(X_{n})} \qquad \varepsilon = 0.10$$

90% interval: $[4.1 \cdot 10^{-6},\ 13.6 \cdot 10^{-6}]$

Oppgave 2 Mai 91

a) $\lambda = n / \sum t_i = 10/2494 \approx 0.0040$ dager^{-1}

Godtar også:
$\lambda = (n-1) / \sum t_i = 9/2494 \approx 0.0036$ dager^{-1}

Intervallgrenser:
$\lambda_L = z_{0.95,2\cdot 10} / (2\cdot\sum t_i) \approx 0.0022$ dager^{-1}

$\lambda_H = z_{0.05,2\cdot 10} / (2\cdot\sum t_i) \approx 0.0063$ dager^{-1}

b) Observasjonsvektoren er $\underline{t} = (t_1, t_2, \ldots\ t_n)'$. Rimelighetsfunksjonen:

$l(\lambda|\underline{t}) = f(\underline{t}|\lambda) = \lambda^n \cdot \exp(-\lambda\cdot\sum t_i)$

A posteriori tetthet for Λ:

$g(\lambda|\underline{t}) \propto g(\lambda)\cdot l(\lambda|\underline{t})$, (der $g(\lambda)$ er a pripori tetthet til Λ, dvs. Gamma(α, β)).

Gir $g(\lambda|\underline{t}) \propto \lambda^{n+\alpha-1}\cdot\exp(-\lambda\cdot(\beta+\sum t_i))$, dvs. Gamma($n+\alpha$, $\beta+\sum t_i$).

Bayes-estimator:

$\lambda^* = E(\Lambda|\underline{t}) = \int \lambda\cdot g(\lambda|\underline{t})\, d\lambda = (\alpha+n) / (\beta+\sum t_i) \approx 0.003758.$

Løsningsskisse, Eksamen August 95

1a Se s. 356 → . $T(X_{(r)}) = \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r) X_{(r)}$

b $\hat{\lambda} = \dfrac{r}{T(X_{(r)})}$ (evt $\dfrac{r-1}{T(X_{(r)})}$)

90 % intervall :

$$\left(\frac{z_{0.95,2r}}{2\cdot T(X_{(r)})} , \frac{z_{0.05,2r}}{2\cdot T(X_{(r)})} \right)$$

$r = n = 6$, $\sum_{1}^{6} X_i = 13$ gir $\underline{(0.201, 0.809)}$

c a posteriorifordeling $g(\lambda) \propto \lambda^{n+k-1} e^{-\lambda(\theta + \sum X_i)}$

som er Gamma $(n+k, \theta + \sum X_i)$

Bayes estimator $\hat{\lambda}_B = \dfrac{n+k}{\theta + \sum X_i} = \dfrac{8}{18} = \underline{0.444}$

~~Sett~~ $\lambda_{a.p.} = \dfrac{k}{\theta}$ $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum X_i}$ Da er

$$\hat{\lambda}_B = \frac{\theta}{\theta + \sum X_i} \hat{\lambda}_{a.p} + \frac{\sum X_i}{\theta + \sum X_i} \cdot \hat{\lambda}$$

August 95

3.a $P(\min(X_i) > x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$

$\min(X_1, X_2)$ er eksponensialfordelt $(\lambda_1+\lambda_2)$

$$\underline{P(X_1 < X_2)} = \int_0^\infty P(X_2 > x) \cdot f_{X_1}(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx = \underline{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}$$

b

$$T_2 = \begin{cases} 0 & B \text{ eller } S \text{ svikter før } A \\ \text{eksponensial fordelt } (\lambda_2) & \text{ellers} \end{cases}$$

$$P(T_2 = 0) = P(\min(T_B, T_S) < T_A)$$

der $\min(T_B, T_S)$ er eksponensial $(\lambda_0+\lambda_S)$

og T_A er eksponensial (λ_1)

Dvs $$P(T_2 = 0) = \frac{\lambda_0+\lambda_S}{\lambda_1+\lambda_0+\lambda_S}$$

$$\underline{E(T)} = E(T_1) + E(T_2 \mid T_2 > 0)\, P(T_2 > 0)$$

$$= \underline{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_0+\lambda_S}}$$

c $T_1 \sim$ eksponensial (3λ)

$T_2 \sim$ eksponensial (2λ)

$$\underline{E(T)} = \frac{1}{3\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \underline{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\lambda}}$$

$$\underline{R(t) = P(T > t)} = \int_0^\infty P(T > t \mid T_1 = s)\, f_{T_1}(s)\, ds$$

$$= \int_0^t P(T_2 > t-s) \cdot 3\lambda \cdot e^{-3\lambda s}\, ds + \int_t^\infty 1 \cdot 3\lambda e^{-3\lambda s}$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}\, 3\lambda e^{-3\lambda s}\, ds + \int_t^\infty 3\lambda e^{-3\lambda s}\, ds$$

$$= 3e^{-2\lambda t}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] + e^{-3\lambda t} = \underline{3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}}$$

$$\underline{MTTF} = \int_0^\infty R(t)\, dt = \frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = \underline{\underline{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\lambda}}}$$

Løsningsskisse
Eksamen August 94

1a (Se s. 408)

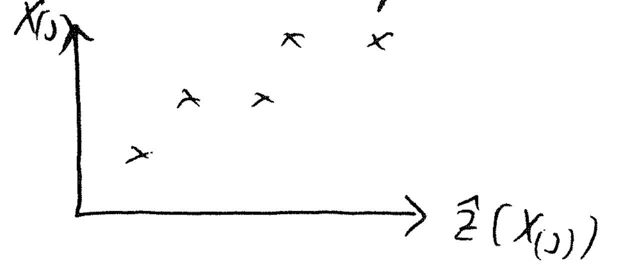
Levetidene $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \quad \le X_{(n)}$

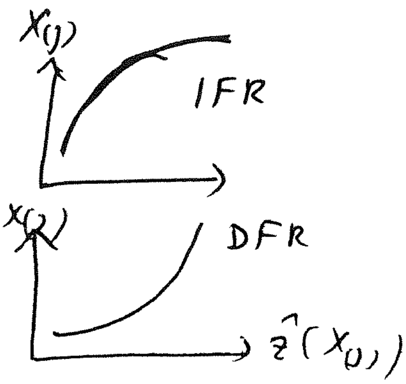
Når $X_{(j)}$ svarer til sviktidspunkt er

$$\hat{Z}(X_{(j)}) = \sum_{\nu \le j} \frac{1}{n-\nu+1}$$

(ν er de j, slik at $X_{(j)}$ er sviktidspkt,

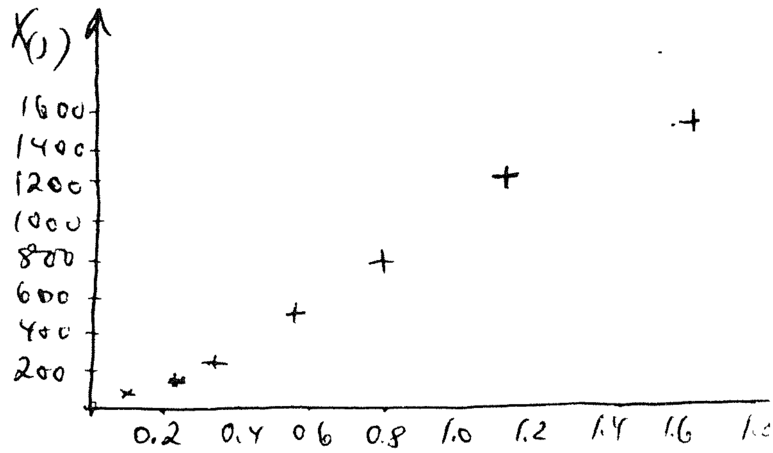
Nelson / Hazard-plott:





1b

j	ν	$\hat{Z}(X_{(j)})$
1	1	0.111
2	2	0.236
3	3	0.379
4	4	0.546
5	—	
6	6	0.796
7	7	1.129
8	8	1.629
9	—	



Eksponensialfordeling synes passe (rett linje)

1c "Likelihood" $\quad \ell(\lambda \mid \underline{x}) = \lambda^n e^{-\lambda \Sigma x_i}$

"A posteriori" $\quad g(\lambda \mid \underline{x}) \propto \lambda^{\alpha+n-1} e^{-\lambda(\beta + \Sigma x_i)}$

Gamma $(\alpha + n, \ \beta + \Sigma x_i)$

Bayes-estimator $\quad \hat{\lambda} = \dfrac{\alpha + n}{\beta + \Sigma x_i}$

$\hat{\lambda}_{a.p} = \dfrac{\alpha}{n} \qquad \hat{\lambda}_{data} = \dfrac{n}{\Sigma x_i}$

$$\hat{\lambda} = \frac{\beta}{\beta + \Sigma x_i} \cdot \hat{\lambda}_{a.p} + \frac{\Sigma x_i}{\beta + \Sigma x_i} \cdot \hat{\lambda}_{data}$$

August 94

1d ① $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3\cdot 365} = \frac{1}{1095}$ dager^{-1}

② Svarer til 3 levetider $\rightarrow$ $\underline{\alpha = 3}$

①&② $\Rightarrow$ $\beta = 3 \cdot 1095 = 3285$ dager

$n = 7$ $\quad \Sigma x_i = 4450$

$$\hat{\lambda} = \frac{3+7}{3285 + 4450} = \frac{10}{7735} = \underline{0.0013}$$

Mai 92 Oppgave 3

$$E(T) = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \int_0^\infty R(t)\, dt, \qquad \textit{vises ved delvis integrasjon.}$$

$$Z(t) = \int_0^t z(u)\, du, \qquad der\ z(u) = \frac{f(u)}{R(u)} = -\frac{d}{dt}\ln[R(t)]$$

$$Z(t) = -\ln R(t), \qquad R(t) = e^{-Z(t)}$$

a) IFR $\Leftrightarrow$ z(t) er ikke-avtakende $\Leftrightarrow$ - lnR(t) er konveks.

$$E(T) = \frac{1}{\alpha\lambda}\Gamma(\frac{1}{\alpha}), \qquad Z(t) = (\lambda t)^{\alpha}, \qquad IFR \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

b) $\ln(Z(t)) = \alpha \cdot \ln(t)$

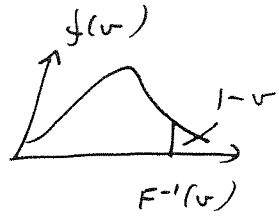
c)

t	Z(t)	R(t)
1480	0.100	0.905
2166	0.211	0.810
2552	0.336	0.715
2818	0.479	0.619
3043	0.646	0.524
3427	0.846	0.429
3785	1.096	0.334
-	-	-
4241	1.596	0.203
5112	2.596	0.075

$\hat{\alpha} \approx 2.5, \qquad \hat{\lambda} \approx 0.0003\ dag^{-1}$

Løsningsforslag i Pålitelighetsanalyse, Juni 1994

Oppgave 1



(a) $F^{-1}(v) \sim (1-v)$ – kvantil

$$F^{-1}(1) = \infty$$

$$H_F^{-1}(1) = \int_0^\infty R(u)\,du = E(T),$$ vises ved delvis integrasjon

$$\text{Skalert TTT-transform} = \frac{H_F^{-1}(v)}{H_F^{-1}(1)}$$

b) $\left(R(u) = e^{-\lambda u}\right)$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$$

$$-\lambda t = \ln(1 - F(t))$$

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-F(t))$$

$$F^{-1}(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-t)$$

$$H_F^{-1}(v) = \int_0^{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-v)} e^{-\lambda u}\,du = -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda u}\right]_0^{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-v)}$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left[1-v-1\right] = \frac{v}{\lambda}$$

$$H_F^{-1}(1) = \frac{1}{\lambda} \quad (= E(T))$$

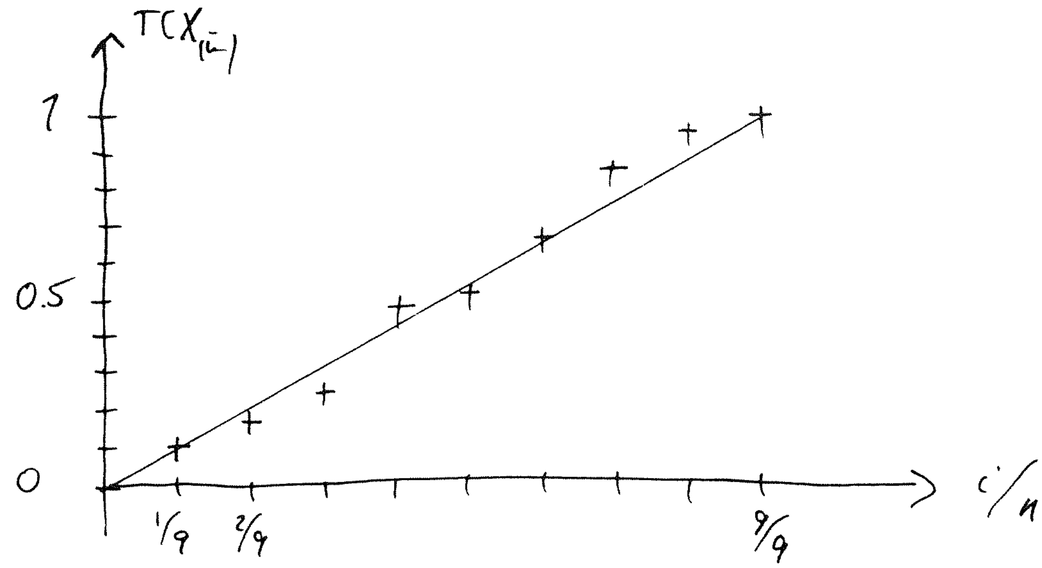
$$\underline{\text{Skalert TTT} = \underline{v}}, \quad 0 \le v \le 1$$

Juni 94

1c) $T(x) = \sum_{j=1}^{i} X_{(j)} + (n-i)x$ for $X_{(i)} \le x < X_{(i+1)}$

$$T(X_{(i)}) = \sum_{j=1}^{i-1} X_{(j)} + (n-i+1) X_{(i)}$$

i	$X_{(i)}$	$\sum_{j=1}^{i-1} X_{(j)}$	$T(X_{(i)})$	$T(X_{(i)})/T(X_{(n)})$
1	80	0	720	0.105
2	140	80	1.200	0.176
3	210	220	1.690	0.247
4	480	430	3.310	0.485
5	530	910	3.560	0.521
6	790	1.440	4.600	0.6735
7	1210	2.230	5.860	0.858
8	1540	3.440	6.520	0.955
9	1850	4.980	6.830	1.000



Eksponensialfordelingen synes å kunne brukes (tilnærmet lineært)

Oppgave 3 Juni 94

a) $T \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$

$E(T) = \frac{2}{\lambda}$

$E(\bar{T}) = \frac{2}{\lambda}$ $\quad \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{T}} = \frac{2n}{\sum_1^n T_i}$ $\quad (= \text{SME})$

$\hat{\lambda} = \frac{2 \cdot 4}{22.8} = \frac{8}{22.8} \approx 0.35$ (fra sampel)

A priori:

$E(T) = 10 = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{10} = 0.20$

b) A priori: $E(\Lambda) = \frac{2}{\alpha}$ $(= 0.2)$, Velg $\alpha = 10$

Likelihood: $L(\lambda / T) = \lambda^{2n}(T_1 \cdots T_n) e^{-\lambda \sum_1^n T_i}$

A posteriori fordeling:

$f(\lambda / T) \propto \lambda e^{-\alpha\lambda} \cdot \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum_1^n T_i}$

$= \lambda^{(2n+2)-1} e^{-(\alpha + \sum_1^n T_i)\lambda}$

dvs $\text{Gamma}(2n+2, \alpha + \sum_1^n T_i)$

Bayes estimator =

$\tilde{\lambda} = E(\Lambda T) = \frac{2n+2}{\alpha + \sum_1^n T_i} = \frac{2 + 2n}{10 + \sum_1^n T_i}$

$= \frac{10}{32.8} = 0.305$

A prioriinformasjonen er likeverdig med å ha én observasjon med verdi $T = 10$ år.