LØSNING

SIF5075 LEVETIDSANALYSE

8. august 2003

Oppgave 1.

Figur 1:
1 er mulig (ingen trend, variasjon i tide mellom feil)
2 er mulig (ingen trend
3-4 lite sannsynlige siden det ikke er trend

Figur 2:
1-2 lite sannsyl p.g.a. tydelig trend.
3 lite sannsyl p.g.a. avtagende trend
4 meget mulig p.g.a. avtagende trend

Oppgave 2.

a) $W(t) = \int_0^t w(u)\,du = \int_0^t \lambda \beta u^{\beta-1}\,du = \underline{\underline{\lambda t^\beta}}$

$\underline{N(\tau)} \sim \text{Poisson}(W(\tau))$ dvs $\underline{\text{Poisson}(\lambda \tau^\beta)}$

$$P(S_1 > t) = P(N(t) = 0)$$

$$= \frac{(\lambda t^\beta)^0}{0!} e^{-\lambda t^\beta} = e^{-\lambda t^\beta}$$

dvs S_1 er Weibull-fordelt med tetthet

$$-\frac{d}{dt} P(S_1 > t)$$

$$\underline{\underline{= \lambda \beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t^\beta} \quad \text{for } t > 0}}$$

b)

$$L = \prod_{j=1}^{N(\tau)} w(s_j) \, e^{-W(\tau)}$$

Med $w(t) = \lambda \beta t^{\beta - 1}$:

$$L = \prod_{j=1}^{N(\tau)} \left(\lambda \beta \, s_j^{\beta - 1} \right) e^{-\lambda \tau^{\beta}}$$

$$= \lambda^{N(\tau)} \beta^{N(\tau)} \left(\prod_{j=1}^{N(\tau)} s_j \right)^{\beta - 1} e^{-\lambda \tau^{\beta}}$$

$\Rightarrow$

$$l(\lambda, \beta) = N(\tau) \log \lambda + N(\tau) \log \beta + (\beta - 1) \sum_{j=1}^{N(\tau)} \log s_j - \lambda \tau^{\beta}$$

Sett inn $N(\tau) = 40$, $\tau = 2500$.

c) (1) $$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{N(\tau)}{\lambda} - \tau^{\beta}$$

(2) $$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{N(\tau)}{\beta} + \sum_{j=1}^{N(\tau)} \log s_j - \lambda \tau^{\beta} \log \tau$$

$0 = (1)$ gir: $$\hat{\lambda} = \frac{N(\tau)}{\tau^{\beta}}$$

Sett inn dette i (2)

$$\frac{N(\tau)}{\hat{\beta}} + \sum_{j=1}^{N(\tau)} \log s_j - N(\tau) \log \tau = 0$$

dvs

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{N(\tau)}{N(\tau)\log\tau - \sum_{j=1}^{N(\tau)} \log s_j} \\ \hat{\lambda} &= \frac{N(\tau)}{\tau^{\hat{\beta}}} \end{aligned}}$$

Innsetting: $N(\tau) = 40$

$\tau = 2500$

$\sum \log s_j = 237.24$

gir $\hat{\beta} = \frac{40}{40 \log 2500 - 237.24} = \underline{0.5282}$

$\hat{\lambda} = \frac{40}{2500^{0.5282}} = \underline{\underline{0.6416}}$

$\hat{\beta} < 1$ svarer til avtagende feilintensitet, og det samsvarer godt med plottet i Fig. 2.

d)

Konf int for β:

$$\hat{\beta} \pm 1.96 \cdot \sqrt{0.0070}$$

$$0.5282 \pm 1.96 \cdot 0.0837$$

$$0.5282 \pm 0.1640$$

dvs $(0{,}3642,\ 0.6922)$ ← 95% konf int for β.

$H_0: \beta = 1$ mot $H_1: \beta \neq 1$:

Forkast H_0 hvis $\beta = 1$ ikke ligger ~~med nivå 5%~~ i intervallet.

dvs. her forkaster vi H_0 på 5% nivå.

$\beta = 1$ svarer til HPP (derfor interessant å teste!)

e)

La $W = 2(l(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) - l(\hat{\lambda}_0, 1))$

der $\hat{\lambda}_0$ er MLE for λ når $\beta = 1$.

Denne finnes ved å maksimere

$$l(\lambda_0, 1) = 40 \log \lambda_0 - \lambda_0 \cdot 2500$$

$$\frac{\partial l(\lambda_0, 1)}{\partial \lambda_0} = \frac{40}{\lambda_0} - 2500$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_0 = \frac{40}{2500} = \frac{4}{250} = \frac{16}{1000} = 0.016$$

Da blir

$$W = 2\left[\, l(0.6416,\ 0.5282) - l(0.016,\ 1)\,\right]$$

$$= 2\left[\, -195.2123 - 205.4067 \,\right]$$

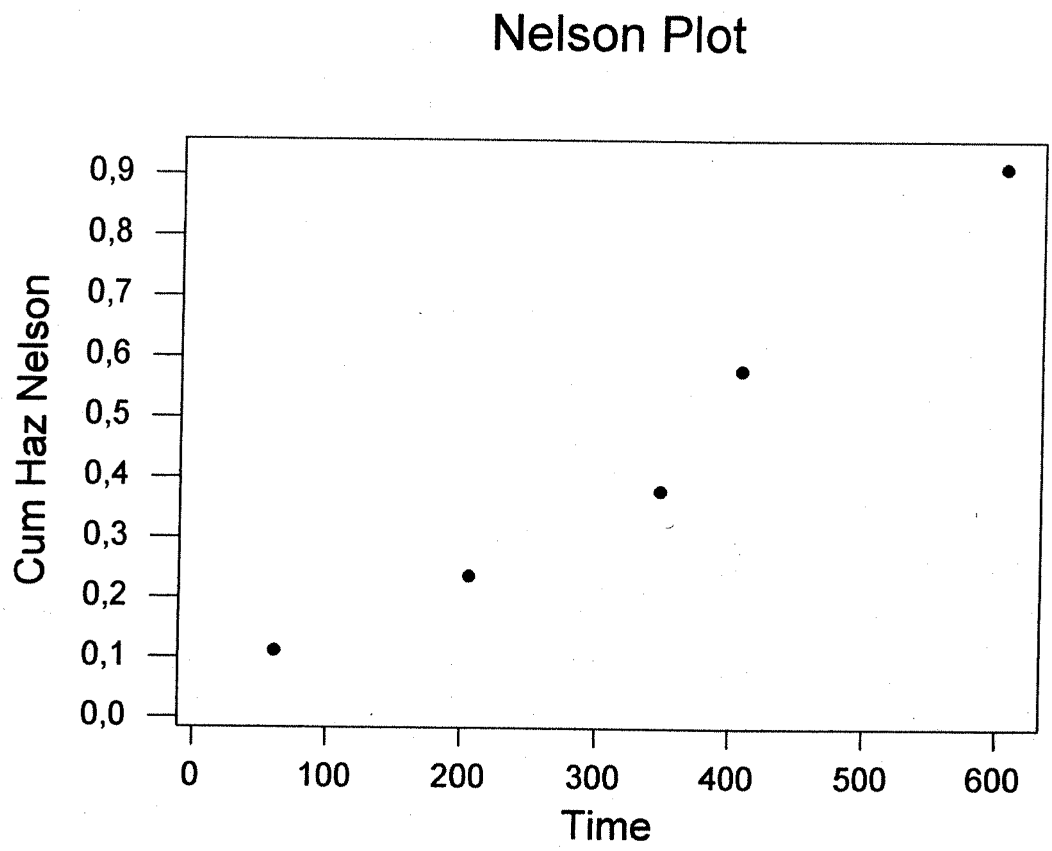
$$= 20.39$$ (Klar forkasting).

(Kritisk verdi ved 5%: 3.84)

Oppgave 3

Nelson's estimator:

Nr	Tid	Ant. feilet	Ant. under risiko	Legg til	Nelson:
1	61	1	9	1/9	0.1111
2	206	1	8	1/8	0.2361
3	348	1	7	1/7	0.3790
4	389*	0			
5	408	1	5	1/5	0.5790
6	485*	0			
7	604	1	3	1/3	0.9123
8	606*	0			
9	648*	0			



En kurve tilpasset punktene vil eventuelt ha en konveks form. Dette tyder i så fall på voksende sviktintensitet (men på den annen side danner punktene en konkav kurve fra 350 og oppover ...).

b) Siden $R(t) = e^{-Z(t)}$ vil vi få estimatoren

$$\hat{R}_{Nelson}(t) = e^{-\hat{Z}_{Nelson}(t)}$$

Denne framgår av tabellen på neste side. KM er også tatt med her (beregnet i den siste tabellen).

$\hat{z}_{Nelson}(t)$ $\hat{R}_{Nelson}(t)$ $\hat{R}_{KM}(t)$

Row	Time	Cum Haz Nelson	Survival Nelson	Survival KM
1	61	0,111111	0,894839	0,888889
2	206	0,236111	0,789693	0,777778
3	348	0,378968	0,684567	0,666667
4	408	0,578968	0,560476	0,533333
5	604	0,912302	0,401599	0,355556

Kaplan-Meier Estimates

Time	Number at Risk	Number Failed	Survival Probability	Standard Error	95,0% Normal CI Lower	Upper
61,0000	9	1	0,8889	0,1048	0,6836	1,0000
206,0000	8	1	0,7778	0,1386	0,5062	1,0000
348,0000	7	1	0,6667	0,1571	0,3587	0,9746
408,0000	5	1	0,5333	0,1733	0,1937	0,8729
604,0000	3	1	0,3556	0,1855	0,0000	0,7192

c) Vi har $k = 5$ observerte feiltider.
Iflg. læreboka s. 391 har vi da

$$W \approx N\left(\frac{5-1}{2}, \frac{5-1}{12}\right)$$

dvs $N(2, 1/3)$

hvis <u>H_0 : Konstant sviktintensitet</u>

er korrekt.

Siden den observerte $W = 2{,}158 > 2$, har vi en svak indikasjon på voksende sviktintensitet.

P-verdien er – for H_0: konstant $z(t)$
mot H_1: voksende $z(t)$

lik $P(W > 2.158) = 1 - P(W \le 2.158)$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{2.158 - 2}{\sqrt{1/3}}\right) = 1 - \Phi(0.27) = \underline{0.3936}$$

Nullhypotesen om konstant sviktintensitet (eksponensialfordeling) kan derfor ikke forkastes.

Oppgave 4

Likelihood:

$$L(\theta / t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i / \theta)$$

$$= 2^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i^2}$$

Aposteriori tetthet:

$$\pi(\theta / t_1, \dots, t_n) \propto L(\theta / t_1, \dots, t_n)\, \pi(\theta)$$

$$\propto \theta^{n+\alpha-1} e^{-\theta\left[\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + \beta\right]}$$

dvs Gamma$(n+\alpha, \sum t_i^2 + \beta)$

Forventn. i denne er

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{n+\alpha}{\sum t_i^2 + \beta}$$

) Type I sensurering:

Vi har $R(t) = P(T>t) = e^{-\theta t^2}$

Dermed blir

$$L(\theta) = 2^m \theta^m \left(\prod_{i=1}^{m} t_{(i)}\right) e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{m} t_{(i)}^2 + (n-m) t_0^2\right)}$$

der m = antall ikke-sensurerte observasjoner.
Fra regningen i forrige punkt ser vi da at

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{m+\alpha}{\sum_{i=1}^{m} t_{(i)}^2 + (n-m) t_0^2 + \beta}$$